Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители Р.И. Лазарева, Ю.А. Абзаев

Томск 2015

Кратные и криволинейные интегралы / Сост. Р.И. Лазарева, Ю.А. Абзаев, – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2015. – 40 с.

Рецензент Г.Д. Садритдинова
Редактор Я.Д. Липатникова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Кратные и криволинейные интегралы» студентами заочной формы обучения всех специальностей и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 2 от 14 сентября 2015 г.

с 1.09.2016
срок действия до 1.09.2021

Оригинал-макет подготовлен Р.И. Лазаревой.

Подписано в печать 8.12.15.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,11. Тираж 50 экз.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов заочного факультета и дают ряд практических рекомендаций студентам по выполнению контрольной работы по теме «Кратные и криволинейные интегралы».

Содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и общепрофессиональных компетенций (ОПК):

ОК-7	Способности к самоорганизации и самообразованию
ОПК-1	Способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования
ОПК-2	Способности выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат
ОПК-4	Способности использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач

В процессе изучения теории кратных и криволинейных интегралов студентом должны быть достигнуты следующие уровни освоения материала:

(запоминание и понимание)	Знать основные определения, уметь охарактеризовать методы и задачи теории кратных и криволинейных интегралов
(применение и анализ)	Уметь самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе, и применять его при анализе результатов экспериментальных исследований.
(оценка и создание)	Владеть методами построения математической модели типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов.

В практической деятельности встречаются многочисленные задачи на нахождение массы различных фигур, объемов пространственных тел, площадей плоских фигур и другие, решение которых возможно с применением кратных и криволинейных интегралов.

Понятие кратных интегралов возникло как результат обобщения определенных интегралов на функции двух и большего числа переменных.

Тема 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1 Понятие двойного интеграла

Рассмотрим непрерывную функцию $z = f(x, y)$ определенную и ограниченную на некоторой замкнутой области D (рис.1). Разобьем область D на n элементарных областей ΔS_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ двумя системами взаимно пересекающихся линий. Внутри каждой элементарной области ΔS_i выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции в этой точке $z(P_i) = f(x_i, y_i)$. Составим сумму вида $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, которая называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D. Максимальное расстояние между точками элементарной площадки (ΔS_i) будем называть диаметром. Обозначим через $\lambda = \max|\Delta S_i|$ наибольший из диаметров элементарных площадок.

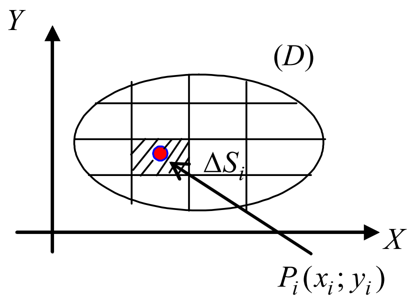

Рис. 1

Определение. Предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$

если он существует и не зависит от способа разбиения области D на

n площадок, ни от способа выбора точки $P_i(x_i; y_i)$ внутри ΔS_i, при условии, что $\lambda = \max|\Delta S_i| \to 0$, называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds\,.$$

1.2. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла?

Геометрический смысл двойного интеграла

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds = V$$

– объем цилиндрического тела с основанием D (рис. 2), ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x, y)$. Из определения двойного интеграла следует, что необходимым условием существования двойного интеграла является ограниченность подынтегральной функции во всех точках фигуры.

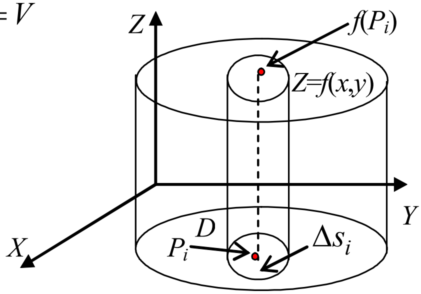

Рис. 2

1.3. Какими свойствами обладает двойной интеграл?

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов. Выполняется при условии, что обе функции интегрируемы:

$$\iint\limits_{(D)} (f_1(x, y) + f_2(x, y))\, ds = \iint\limits_{(D)} f_1(x, y)\, ds + \iint\limits_{(D)} f_2(x, y)\, ds.$$

2. Вынесение константы за знак интеграла:

$$\iint\limits_{(D)} k\, f(x, y)\, ds = k \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds.$$

3. Разбиение области на части соответствует сумме интегралов:

$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\,ds + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\,ds$ – если области (D_1) и (D_2) не имеют внутренних точек.

4. Если функция $f(x,y)=1$, то двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} ds = S(D)$ – численно равен площади области D.

5. Теорема (о среднем для двойного интеграла). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то в этой области найдется такая точка P_0, что интеграл равен произведению функции в точке P_0 на площадь области D:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = f(P_0)\cdot S(D).$$

Тема **2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА**

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Вычисление двойного интеграла по области (D)

Из определения двойного интеграла следует:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_{D} f(x,y)ds.$$

Вычислительную формулу получим исходя из физического смысла двойного интеграла. Пусть требуется найти массу области (*D*) (рис. 3), ограниченной линиями: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причём $f_1(x) \le f_2(x)$ на $[a,b]$. Любая прямая, параллельная оси *OY*, пересекает границу области (*D*) не более чем в двух точках. Плотность в области (*D*) меняется по закону $\rho = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ интегрируема на (*D*). Так как $f(x,y)$ интегрируема на (*D*), то предел интегральных сумм не зависит от способа разбиения области (*D*) на элементарные части. Разобьём область (*D*) на части простейшим образом прямыми линиями, параллельными осям координат. Площадь элементарного участка равна: $ds = dxdy$ (рис. 3). Будем предполагать, что на элементарном участке плотность распределения масс постоянна и равна $f(x,y)$. Тогда масса элементарной площадки приближенно равна: $f(x,y)ds = f(x,y)dxdy$.

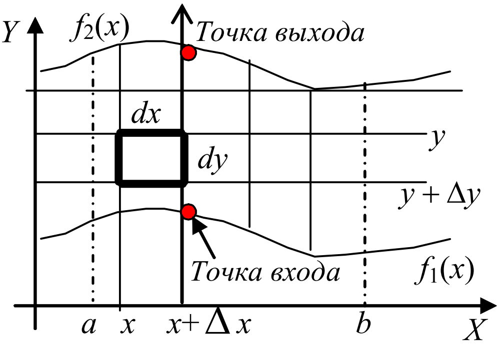

Рис. 3

Для получения массы всей фигуры (D) «просуммируем» сначала массы элементарных площадок, расположенных вдоль оси OY между точкой входа и выхода. В результате получим определённый интеграл по переменной y: $\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy = dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$. Этот интеграл вычисляется при фиксированном значении x.

Мы получаем массу одного столбца. Теперь «просуммируем» массы всех остальных столбцов от прямой $x = a$ до прямой $x = b$. Получим интеграл: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$, он называется повторный. С другой стороны, мы знаем, что масса такой плоской области (D) вычисляется с помощью двойного интеграла $m(D) = \iint\limits_D f(x,y)ds$. В результате мы получаем формулу $\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$ для вычисления двойного интеграла в которой интеграл по переменной y называется внутренним. Вычисляется он при постоянном значении x, в результате получается некоторая функция от x, после чего вычисляется обычный определённый интеграл от этой функции.

1.2. Можно ли при вычислении двойного интеграла изменить порядок интегрирования?

Да, можно при вычислении двойного интеграла внутренний интеграл вычислять по переменной x.

Пусть область (D) ограничена линиями $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$. Тогда, аналогично, разобьём область (D) (рис. 4) на части простейшим образом: прямыми линиями, параллельными осям координат. Для получения массы всей фигуры (D) «просуммируем» сначала массы элементарных площадок, расположенных вдоль оси OX между точкой входа и выхода. В результате получим определённый интеграл по переменной x:

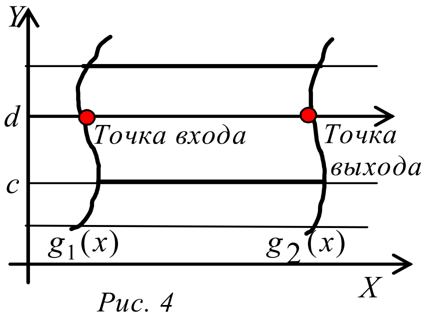

Рис. 4

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dxdy = dy \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx.$$

Мы получаем массу одного столбца. Теперь «просуммируем» массы всех остальных столбцов от прямой $y = c$ до прямой $y = d$. Получим повторный интеграл $\int_c^d dy \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx$. В результате мы получаем формулу для вычисления двойного интеграла $\iint_D f(x,y)ds = \int_c^d dy \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx$, где интеграл по переменной x называется внутренним. Вычисляется он при постоянном y. Получаем некоторую функцию от y после чего вычисляем обычный определённый интеграл от этой функции.

1.3. Зависит ли вычисление двойного интеграла от области (D)?

Да, зависит. В случае, если область (D) более сложного вида, её разбивают на области (D_1), (D_2) и т. д. и получают суммы двойных интегралов.

1.4. Зависит ли вычисление двойного интеграла от формы задания кривой?

Да, зависит. Рассмотрим **двойной интеграл в полярных координатах.**

Пусть требуется вычислить двойной интеграл по области (D) (рис. 5), которая задана в полярной системе координат уравнениями: $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, причём $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$ на $[\alpha; \beta]$, где $\alpha < \beta$. Для нахождения массы такой фигуры разобьём её на элементарные части лучами $\varphi = \mathrm{const}$ и концентрическими окружностями с центрами в полюсе. Будем предполагать, что площади элементарных частей приближённо равны площади прямоугольников со сторонами dr и $rd\varphi$, тогда $ds = rdrd\varphi$. Вспомним формулы перехода от полярных координат к декартовым координатам $x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi$. Будем предполагать, что на элементарной площадке ds плотность постоянная и равна $f(x, y)$, тогда масса выделенного элемента ds будет $f(x, y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr$, а масса пластины, заключенной между лучами φ и $\varphi + d\varphi$ равна

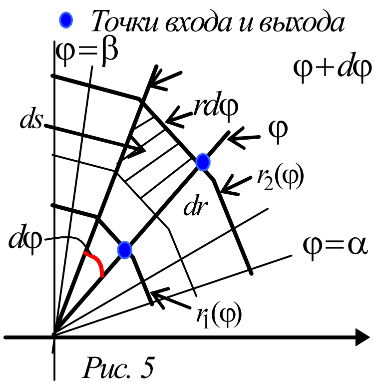

Рис. 5

$$\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr = d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Теперь «просуммируем» полученные таким образом массы по всей фигуре (D) от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$, получим:

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Внутренний интеграл вычисляется по переменной r при $\varphi=\text{const}$ от точки входа до точки выхода.

2. Решение задач

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x-2)dxdy$ по области D, образованной прямой проходящей через точки $A(0;4)$ и $B(4;0)$, и параболой $y=x^2+2$.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_a}{x_b-x_a}=\frac{y-y_a}{y_b-y_a}$. Получим уравнение прямой $\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-4}{0-4}$ или $y=4-x$. Построим область, полученную в результате пересечения параболы $y=x^2+2$ с прямой

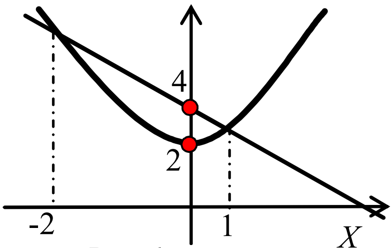

Рис. 6

$y=4-x$ (рис. 6). Найдем точки пересечения параболы с прямой: $x^2+2=4-x$, получим квадратное уравнение $x^2+x-2=0$. Найдем его корни: $D=1+8=9$, $x_1=1$, $x_2=-2$. Из построенной фигуры видно, что по оси OX фигура ограничена прямыми линиями $x_1=1$ и $x_2=-2$. Эти значения будут пределами для внешнего интеграла. По оси OY фигура ограничена кривой $y=x^2+2$ и прямой $y=4-x$. Любая прямая, параллельная оси OY, пересекает границу нашей области не более, чем в двух точках, поэтому внутренний интеграл вычислим по переменной y. Расставив пределы интегрирования в двойном интеграле, получим:

$$\iint\limits_D (x-2)dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+2}^{4-x} (x-2)dy = \int\limits_{-2}^{1} (x-2)y\Big|_{x^2+2}^{4-x} dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} (x-2)(4-x-x^2-2)dx = \int\limits_{-2}^{1} (x-2)(-x^2-x+2)dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} (-x^3+x^2+4x-4)dx = -\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-2+4\right)-\left(\frac{16}{4}+\frac{8}{3}-8-8\right)\right) = -\left(\frac{23}{12}-\frac{28}{3}\right) = \frac{89}{12}.$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$ по области $D: y = x,\ y = 3x,\ y = 12 - x,\ y = 2$.

Решение. Построим область, полученную в результате пересечения заданных прямых (рис. 7). Область $D = ABCEF$ сложная, наименьшее число разбиений этой области возможно только на области D_1 и D_2 (рис. 7).

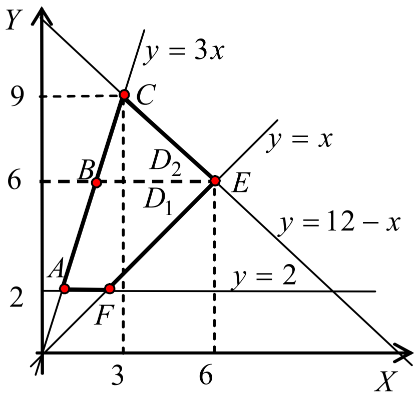

Рис. 7

Найдем точки пересечения прямых, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = 12 - x, \end{cases}$ получим точку $E(6; 6)$. Из системы уравнений $\begin{cases} y = 3x, \\ y = 12 - x, \end{cases}$ получим точку $C(3; 9)$. Аналогично найдем точки A и F. Поскольку область D разбили на две области, то искомый интеграл будет равен сумме двух интегралов

$\iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy$. Из расположения областей D_1 и D_2 следует, что внешние интегралы будем вычислять по переменной y. По оси $OУ$ области ограничены прямыми $y = 2$, $y = 6$, $y = 9$.

Внутренние интегралы будем вычислять по переменной x. По оси OX области ограничены прямыми $y = 3x$, $y = x$, $y = 12 - x$. Для записи пределов интегрирования представим уравнения в виде: $x = \frac{y}{3}$, $x = y$ и $x = 12 - y$. Получим:

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_2^6 dy \int_{\frac{y}{3}}^{y} xdx + \int_6^9 dy \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} xdx = \int_2^6 dy \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{y}{3}}^{y} + \int_6^9 dy \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{y}{3}}^{4-y} =$$

$$= \int_2^6 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2}{2}\right) dy + \int_6^9 \left(\frac{(4-y)^2}{2} - \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2}{2}\right) dy = \int_2^6 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{18}\right) dy +$$

$$+ \int_6^9 \left(\frac{16 - 8y + y^2}{2} - \frac{y^2}{18}\right) dy = \int_2^6 \frac{8y^2}{18} dy + \int_6^9 \left(\frac{144 - 72y + 8y^2}{18}\right) dy =$$

$$= \left.\frac{4}{9}\frac{y^3}{3}\right|_2^6 + \left.\left(\frac{4}{9}\frac{y^3}{3} - 4\frac{y^2}{2} + 72y\right)\right|_6^9 =$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{9^3}{3} - \frac{6^3}{3}\right) - 4\left(\frac{9^2}{2} - \frac{6^2}{2}\right) + 72(9-6) = \frac{6286}{27}.$$

Пример 3. Вычислить площадь области D: $(2x^2 + 2y^2)^2 = (2x)^3$ и построить область интегрирования.

Решение. Применим формулы перехода к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Подставим в уравнение $(2(r\cos\varphi)^2 + 2(r\sin\varphi)^2)^2 = (2r\cos\varphi)^3$. В результате упрощения, получим уравнение в полярной системе координат:

$$(4r^4((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2)^2 = 8r^3(\cos\varphi)^3 \Rightarrow r = 2\cos^3\varphi$$

Область интегрирования представлена в полярной системе координат. Запишем пределы интегрирования. Значения угла φ изменяются в пределах $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Уравнение $r = 2\cos^3\varphi$ представляет уравнение окружности в полярной системе координат; построим ее, задавая значения угла φ.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	π	$\pi+\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	2π
r	2	$2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$	0	$-2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$	-2	$-2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$	0	$2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$	2

Построим в полярной системе координат область D (рис. 8). Площадь будет равна $S_D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\varphi$. Вычислим интеграл, поскольку фигура симметрична, то можно рассмотреть $-0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

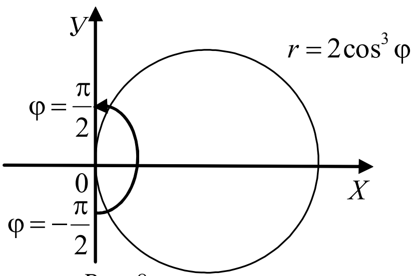

Рис. 8

$$\iint\limits_D rdrd\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos^3\varphi} r\,dr = = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos^3\varphi} d\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos^6\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 d\varphi =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi)d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2\varphi d\varphi\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\frac{\sin 4\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2\varphi)d(\sin 2\varphi)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Пример 4. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)ds$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где D – область, ограниченная линиями $x+y=3$, $x-y=2$, $x=0$.

Решение. Найдем точку B (рис. 9) пересечения прямых $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$, получим $B(2{,}5;\ 0{,}5)$. Вычислим внешний интеграл по переменной x. Из построенной фигуры видно (рис. 9), что по оси OX фигура ограничена прямыми $x=0$ и $x=2{,}5$. Эти значения будут пределами для внешнего интеграла. По оси OY фигура ограничена прямыми $y=x-2$ и $y=3-x$. Тогда внешний интеграл по переменной x есть – $\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_0^{2{,}5} dx \int\limits_{x-2}^{3-x} f(x,y)dy.$

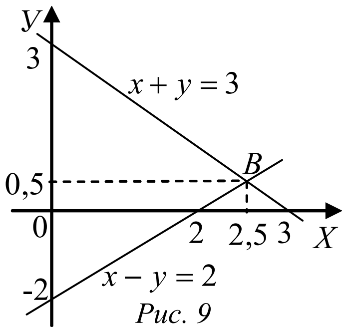

Рис. 9

Расставим пределы интегрирования в другом порядке. Вычислим внешний интеграл по переменной y. В этом случае область интегрирования необходимо разбить на две прямой $y=0{,}5$. По оси OY области ограничены прямыми линиями

$y=-2$, $y=0{,}5$, $y=3$. Внутренние интегралы будем вычислять по переменной x. По оси OX фигура ограничена прямыми $x=2+y$, $x=3-y$ и $x=0$. Получим сумму двух интегралов

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_{-2}^{0{,}5}dy\int_0^{2+y}f(x,y)dx+\int_{0{,}5}^{3}dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx.$$

Пример 5. Изменить порядок интегрирования $\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$. Изобразить область интегрирования.

Решение. Построим фигуру (рис. 10) по значениям пределов интегрирования $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$. Преобразуем последнее уравнение, получим: $y^2=1-x^2$. Это уравнение окружности $x^2+y^2=1$ с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=1$. Областью интегрирования является полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ (рис. 10). Изменим порядок интегрирования. Вычислим внешний интеграл по переменной y. По оси OY область интегрирования ограничена значениями $y=0$ и $y=1$. По оси OX область интегрирования ограничена уравнениями полуокружностей $x=-\sqrt{1-y^2}$ и $x=\sqrt{1-y^2}$. Получим: $\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$

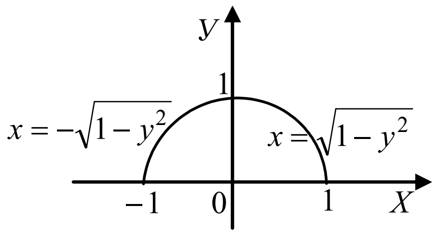

Рис. 10

Тема 3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие тройного интеграла

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена на V.

По аналогии с построением интегральной суммы двойного интеграла разобьем пространственную область V (рис. 11) на n элементарных объемов ΔV_i, где $i = 1, 2 \ldots n$. Внутри каждого элементарного объема ΔV_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим значение функции в этой точке $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$. Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ для функции $f(x, y, z)$.

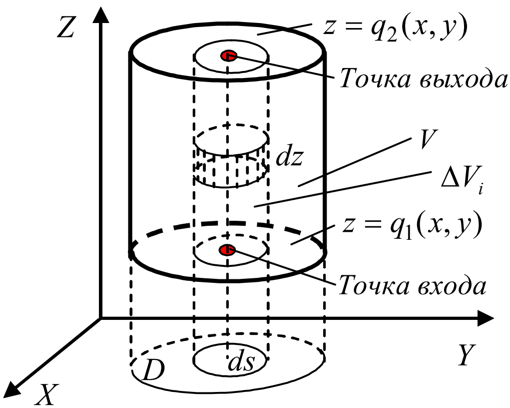

Рис. 11

Определение. Предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ если он существует и не зависит от способа разбиения области V на n площадок, ни от способа выбора точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$ внутри ΔV_i, при условии, что наибольший из диаметров $\lambda = \max|\Delta V_i| \to 0$, называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dv.$$

1.2. Вычисление тройного интеграла

Предположим, что пространственная область V (рис. 11) ограничена цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси OZ и поверхностями $z = q_1(x, y)$ – снизу и $z = q_2(x, y)$ – сверху. Область вытянута вдоль оси OZ, а функции $z = q_1(x, y)$ и $z = q_2(x, y)$ заданы в плоскости XOY, поэтому область D – проекция пространственной фигуры V будет находиться на плоскости XOY (рис. 11). Выделим длинный узкий цилиндр, проекция которого на область D равна ds. Рассмотрим элемент высотой dz. Объем этого элемента есть $dV = dsdz$. Будем предполагать, что плотность элементарной фигуры постоянна и равна $\rho = f(x, y, z)$. Тогда масса элементарной фигуры будет равна $f(x, y, z)dv = f(x, y, z)dsdz$. Для нахождения массы выделенного цилиндра «просуммируем» все элементы вдоль оси OZ, получим: $ds \int\limits_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)} f(x, y, z)dz$. Этот интеграл вычисляется по переменной z от точки входа до точки выхода при фиксированном значении ds. Чтобы получить массу всей фигуры, необходимо «просуммировать» массы всех таких узких цилиндров по области (D), тогда $m(V) = \iint\limits_{(D)} ds \int\limits_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)} f(x,y,z)dz$. Используя определение тройного интеграла

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dv,$$

запишем формулу для вычисления тройного интеграла по фигуре (V): $\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dV = \iint\limits_{(D)} ds \int\limits_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$ Здесь $ds = dxdy$ – элемент площади (D).

Мы получили **правило для вычисления тройного интеграла:** сначала интегрируем функцию $f(x, y, z)$ по переменной

z от точки входа до точки выхода, считая x и y постоянными, затем от полученного результата вычислим двойной интеграл по области (D), которая является проекцией фигуры (V) на плоскость XOY. Правило сформулировано для случая, если область (D) находится в плоскости XOY.

Замечание: для нахождения области (D) тело будем проектировать на ту плоскость, в которой заданы функции $z = q_1(x, y)$ и $z = q_2(x, y)$.

1.3. Можно ли вычислить тройной интеграл, если поверхности заданы в системе координат, отличной от декартовой?

Да, можно. Рассмотрим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Положение точки M (рис. 12) задается полярными координатами r и φ и аппликатой z. Координаты (r, φ, z) называются цилиндрическими. Их связь с декартовыми

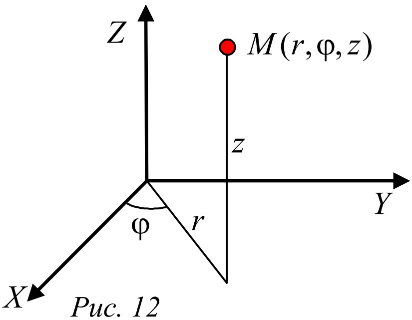

Рис. 12

координатами определяются по формулам
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$
учитывая, что $ds = dxdy = rdrd\varphi$, запишем выражение для тройного интеграла в цилиндрических координатах: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz$.

2. Решение задач

Пример. Найти объем тела ограниченного поверхностями: $z = 6 - x^2 - y^2$; $z^2 = x^2 + y^2$, если $z \geq 0$.

Решение. Поверхность второго порядка $z = 6 - x^2 - y^2$ является круговым параболоидом, следующая поверхность второго порядка $z^2 = x^2 + y^2$ является конусом (рис. 13).

Рассмотрим только ту часть фигуры, которая удовлетворяет условию $z \geq 0$ (рис. 14). Объем тела вычисляется по формуле $V = \iiint\limits_{(R)} dV$. Переменная z изменяется от значений $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (точки входа по поверхности конуса) до значений $z = 6 - x^2 - y^2$ (точки выхода по поверхности кругового параболоида). Из вида данных уравнений следует, что для нахождения области (D) те-

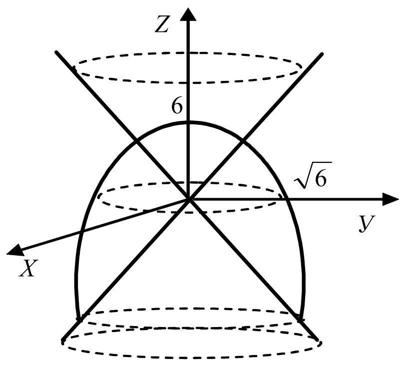

Рис.13

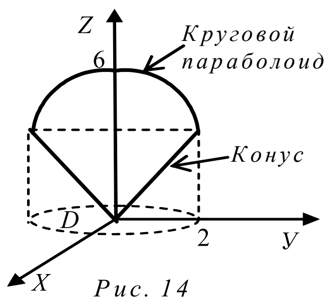

Рис. 14

ло будем проектировать на плоскость XOY , и проекцией будет являться окружность с центром в начале координат. Найдём её радиус. Решим систему уравнений:

$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$ Складывая уравнения, получим: $z^2 + z - 6 = 0.$

Найдем точки пересечения по оси OZ: $z_1 = 2;$ $z_2 = -3,$ условию $z \geq 0$ удовлетворяет значение $z = 2,$ уравнение окружности есть: $4 = x^2 + y^2.$ Как известно, при вычислении двойного интеграла по окружности удобно использовать полярную систему координат. Подставим в уравнение окружности формулы перехода к полярной системе координат, получим уравнение окружности в виде $r=2$, при $0\le\varphi\le 2\pi$. Таким образом, для вычисления объема тела мы применим цилиндрическую систему координат, получим: $V=\iiint\limits_{(R)}dV=\iiint\limits_{(R)}dxdydz=\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2}dz=\begin{vmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ x^2+y^2=r^2 \\ dxdy=rdrd\varphi \end{vmatrix}=$

$$=\iint\limits_{D}rdrd\varphi\int\limits_{r}^{6-r^2}dz=\iint\limits_{D}(6-r^2-r)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{2}(6r-r^3-r^2)dr=\int\limits_{0}^{2}d\varphi\left(6\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{16}{3}\varphi\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{32\pi}{3}.$$

Тема 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Как зависит вычисление криволинейного интеграла от способа задания кривой?

Рассмотрим различные способы задания кривой L.

1. *Пусть кривая задана в декартовой системе координат уравнением* $y=g(x)$ на промежутке $[a,\ b]$, причем сама функция $y=g(x)$ и ее производная $y'=g'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Вычислим длину дуги с помощью определенного интеграла. Для этого воспользуемся формулой для дифференциала дуги $dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. Для функции $y=g(x)$ найдем ее дифференциал $dy=g'(x)dx$, тогда дифференциал дуги будет иметь вид

$dl = \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$. Криволинейный интеграл 1-го рода можно представить определенным интегралом в виде:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g(x))^2}\,dx.$$

2. *Пусть кривая L задана параметрически уравнениями* $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ где $\alpha \le t \le \beta$. Найдем $\begin{cases} dx=\varphi'(t)dt, \\ dy=\psi'(t)dt, \end{cases}$ тогда дифференциал дуги примет вид $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$, и криволинейный интеграл можно представить следующим выражением:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

В случае пространственной системы координат параметрическое задание функции есть: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$. Запишем выражение для дифференциала дуги $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt$ и криволинейного интеграла

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\varphi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt.$$

3. *Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением* $r=r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тогда, используя формулы перехода к полярной системе координат $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$ дифференцируем их $\begin{cases} dx=r'\cos\varphi-r\sin\varphi \\ dy=r'\sin\varphi+r\cos\varphi \end{cases}$ и получаем выражение для дифференциала дуги $dl=\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$ и криволинейного интеграла

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

2. Решение задач

Пример 1. Найти длину первого витка винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ и массу витка, если плотность в каждой точке витка равна расстоянию от этой точки до плоскости *XOY*.

Решение. Функция задана параметрически, значение параметра t для первого витка изменяется в пределах $0 \le t \le 2\pi$. Для построения фигуры (рис. 15) найдем значения переменных на концах промежутка. При $t = 0$ получим $x = a,\ y = 0,\ z = 0$, при $t = \frac{\pi}{2}$ будем иметь $x = 0,\ y = a,\ z = \frac{b\pi}{2}$, при $t = 2\pi$ будет $x = a,\ y = 0,\ z = 2\pi b$. Дифференцируем заданную функцию $dx = -a\sin t dt,\ dy = a\cos t dt,\ dz = bdt$ и находим дифференциал дуги $dl = \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt.$

1. Длина кривой, вычисляется по формуле $L = \int\limits_L dl$.

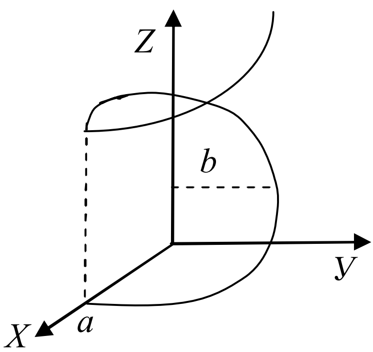

Рис. 15

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. Для нахождения массы витка воспользуемся формулой $m(L) = \int\limits_L f(x, y, z)dl$, где плотность есть функция $f(x, y, z)$. Из условия задачи известно, что плотность в каждой точке витка равна расстоянию от этой точки до плоскости *XOY*, то есть, равна z. Тогда масса кривой равна

$$m(L) = \int\limits_L f(x, y, z)dl = \int\limits_L zdl = \int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2 + b^2}dt =$$

$$= b\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} t\,dt = b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = b\sqrt{a^2+b^2}\,2\pi^2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (\tilde{o} - \acute{o})\,dl$, где L − окружность, заданная уравнением: $x^2 + \acute{o}^2 = a\,\tilde{o}$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат. Подставим $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ в уравнение окружности $x^2 + \acute{o}^2 = a\,\tilde{o}$.

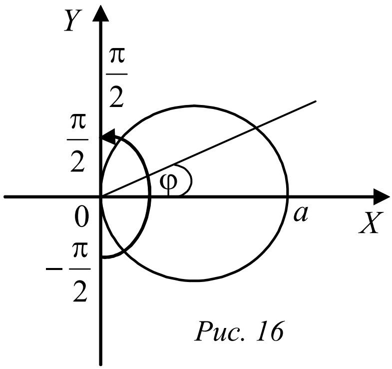

Рис. 16

Получим уравнение окружности в полярной системе $r = a\cos\varphi$, при изменении φ в пределах $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (рис. 16). Вычислим дифференциал дуги в полярной системе координат по формуле $dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$. Дифференцируем выражение $r = a\cos\varphi$, получим $dl = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\,d\varphi$. Тогда

$$\int\limits_L (\tilde{o} - \acute{o})\,dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi - r\sin\varphi)\,a\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(1+\cos 2\varphi)}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}+1\right)=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{2x+y}$, где L – отрезок прямой линии, заключенный между точками $A(0;1)$ и $B(3;4)$.

Решение. Запишем уравнение прямой AB как уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-1}{4-1}$, получим $y=x+1$ (рис. 17).

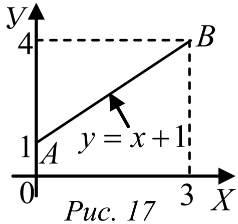

Рис. 17

Дифференцируем полученное уравнение $dy=1\cdot dx$ и вычисляем дифференциал дуги в декартовой системе координат $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{1+1}dx=$ $=\sqrt{2}dx$. Вычислим криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{2x+y}=\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{2}dx}{3x+1}=\frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+\frac{1}{3}}==\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|\Bigg\|_0^3=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\ln\frac{10}{3}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln 10\,.$$

Тема 5. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие криволинейного интеграла второго рода

Пусть в некоторой системе координат задана ориентированная кривая L с направлением движения от точки A до точки B (рис. 18). Разобьем кривую L на части $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots \Delta L_n$ и рассмотрим проекции частей на оси координат. Проекция Δy_i считается положительной, если направление движения некоторой точки по части дуги ΔL_i совпадает с направлением движения по проекции Δy_i (в сторону увеличения y), в противном случае – отрицательной. Пусть на кривой L задана функция $f(P)$ в точке $P(x,y,z)$. На каждой части ΔL_i возьмем по точке P_i и вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$ и рассмотрим интегральные суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta y_i$. Вычислим пределы интегральных сумм при условии, что λ – максимальный из диаметров частей $\Delta L_i \to 0$, тогда интегралы:

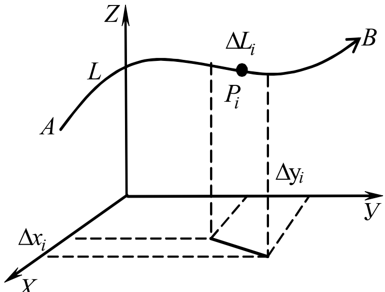

Рис. 18

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i = \int_L f(x,y.z)dx,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i = \int_L f(x,y.z)dy,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i = \int_L f(x,y.z)dz$$

называются интегралами по координатам или криволинейными интегралами второго рода. Пусть на кривой (L) заданы сразу три функции $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$, тогда интеграл вида $\int\limits_L Xdx + \int\limits_L Ydy + \int\limits_L Zdz$ называется составным и его можно записать с одним знаком интеграла. $\int\limits_L Xdx + Ydx + Zdz$ – составной интеграл по координатам. Если направление движения по дуге (L) (рис. 18) изменить на проти-

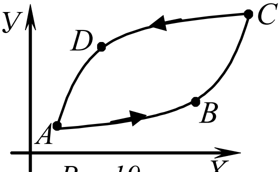

Рис.19

воположное, то знаки всех проекций изменятся на противоположные. Если кривая (L) замкнута (рис. 19), то необходимо указать направление обхода. Интеграл по замкнутому контуру обозначают следующим образом:

$$\oint_L f(x,y)dy = \int_{ABC} f(x,y)dy + \int_{CDA} f(x,y)dy.$$

Направление обхода по кривой называют положительным, если лежащая внутри контура область остается слева относительно точки (рис. 19), движущейся по контуру в заданном направлении.

1.2. В чем состоит механический смысл криволинейного интеграла второго рода?

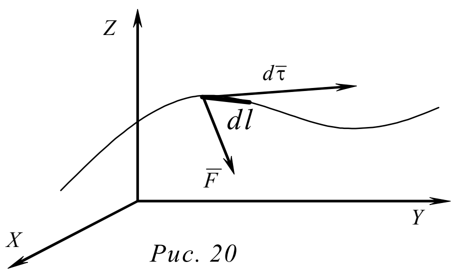

Рис. 20

Пусть задана переменная сила $\vec{F}$ с проекциями $\vec{F} = \{X; Y; Z\}$ на оси координат. Известно, что она передвигает материальную точку по кривой (L). Найдем работу этой силы. Возьмем элемент дуги dl и заменим его отрезком $\vec{d\tau}$, идущим по касательной (рис. 20). Из курса аналитической геометрии мы знаем, что работа силы $\overline{F}$ по перемещению материальной точки по пути $\vec{d\tau}$ равна $dA = (\vec{F}, \overrightarrow{d\tau}) = Xdx + Ydy + Zdz$. Суммируя все элементарные работы и переходя к пределу, получим составной интеграл $A = \int_T Xdx + Ydy + Zdz$. С помощью составного криволинейного интеграла вычисляется работа силы $\overline{F}$ с проекциями X, Y, Z вдоль пути (L).

1.3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

1. Пусть задана плоская кривая L уравнением $y = g(x)$, на $a \le x \le b$ с направлением движения от a к b, тогда криволинейный интеграл второго рода имеет вид:

$$\int_L f(x, y, z)dy = \int_a^b f(x, y)g'(x)dx.$$

2. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t). \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, с направлением движения от α к β, тогда криволинейный интеграл второго рода имеет вид:

$$\int_L f(x, y, z)dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t)dt.$$

Замечание. Чтобы вычислить составной криволинейный интеграл, необходимо все координаты x, y, z и их дифференциалы dx, dy, dz выразить через переменную, принятую в качестве основной.

2. Решение задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L yxdx,$ где (L) – дуга параболы $y^2 = x$ от точки $A(9;-3)$ до точки $B(1;1)$.

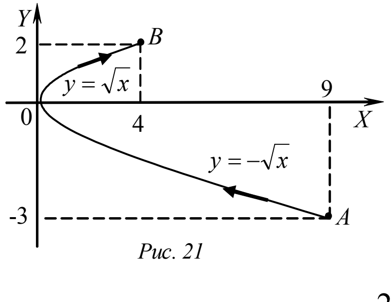

Рис. 21

Решение. При движении по параболе $y^2 = x$ от точки $A(9; -3)$ до точки $B(4; 2)$ (рис. 21) удобнее принять переменную y как основную переменную интегрирования, получим:

$$\int\limits_L yxdx = \int\limits_{-3}^{2} yy^2 2ydy = 2\int\limits_{-3}^{2} y^4 dy = = 2\frac{y^5}{5}\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{2}{5}(2^5 - (-3)^5) = 110.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_L 2xy\,dx + xdy$ в положительном направлении обхода по замкнутому контуру L фигуры, образованной линиями $y=0,\ \ x=1,\ \ y=x^2$.

Решение. По заданным уравнениям построим фигуру и найдем точки пересечения линий (рис. 22), стрелками указано направление обхода. Из решения системы $y=0, x=1$ найдем точку пересечения $C(1;0)$. Из решения системы $x=1, y=x^2$ найдем точку $B(1;1)$ и аналогично точку $O(0;0)$.

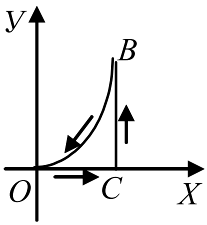

Рис. 22

Поскольку замкнутый контур $OCBO$ (рис. 22) состоит из трех отрезков, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру будет вычисляться как сумма интегралов по отрезкам OC, CB и BO.

Уравнение OC есть $y=0$, тогда $dy=0$ и криволинейный интеграл на отрезке OC равен $\int\limits_{OC} = 0$. Уравнение CB есть $x=1$, тогда $dx=0$ и криволинейный интеграл на отрезке CB равен $\int\limits_{CB} = \int\limits_0^1 1dy = 1$. Уравнение BO есть $y=x^2$, тогда $dy=2xdx$ и криволинейный интеграл на отрезке BO равен

$$\int\limits_{BO} = \int\limits_1^0 (2x^3+2x^2)dx = \left(\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{7}{6}.$$

Следовательно, $\int\limits_{OCBO} = \int\limits_{OC} + \int\limits_{CB} + \int\limits_{BO} = 1 - \frac{7}{6} = \frac{1}{6}$.

Тема 6. ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ФИГУРЕ

1.Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Нахождение массы фигуры

Массу фигуры можно вычислить с помощью интеграла по фигуре если известна функция плотности $\rho = \rho(x, y, z)$.

1) $\int\limits_{T} \rho(x, y, z) dl = m(L)$ – масса кривой (L),

2) $\iint\limits_{D} \rho(x, y) dxdy = m(D)$ – масса плоской области (D),

3) $\iiint\limits_{R} \rho(x, y, z) dxdydz = m(R)$ – масса тела (R).

1.2. Нахождение статических моментов

Статический момент некоторой точки относительно оси или плоскости равен произведению массы этой точки на ее расстояние до оси или плоскости.

Статический момент системы материальных точек равен

Рис. 23. Расстояния от точки $P(x, y, z)$ до координатных плоскостей, $PC = z$, $CB = x$, $CA = y$; осей координат $PB = \sqrt{x^2 + z^2}$, $PA = \sqrt{y^2 + z^2}$, $PD = \sqrt{x^2 + y^2}$; и начала координат: $PO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

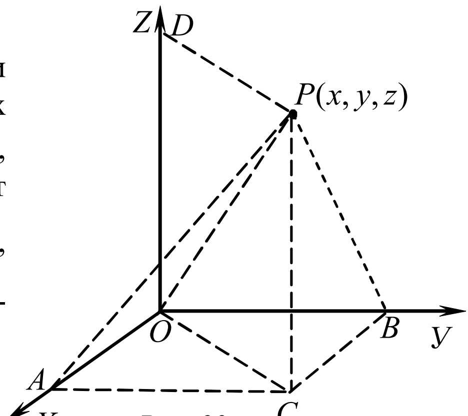

Рис. 23

сумме статических моментов каждой точки системы. В случае плоской области (D) статические моменты вычисляются относительно осей координат:

$$M_{ox} = \iint\limits_D \rho(x,y)yds, \qquad M_{oy} = \iint\limits_D \rho(x,y)xds.$$

Вычисление статических моментов плоской кривой (L):

$$M_{ox} = \int\limits_L \rho(x,y)ydl; \quad M_{oy} = \int\limits_L \rho(x,y)xdl.$$

В случае пространственной кривой L статические моменты вычисляются относительно координатных плоскостей (рис. 23):

$$M_{xoy} = \int\limits_L \rho(x,y,z)zdl\,;\ M_{yoz} = \int\limits_L \rho(x,y,z)xdl\,;\ M_{xoz} = \int\limits_L \rho(x,y,z)ydl\,.$$

В случае пространственного тела (R) – статические моменты можно найти относительно осей координат (рис. 23):

$$M_{ox} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)\sqrt{z^2+y^2}dv; \qquad M_{oy} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)\sqrt{x^2+z^2}dv;$$

$$M_{oz} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2}dv.$$

Вычисление статических моментов пространственного тела (R) относительно координатных плоскостей (рис. 23):

$$M_{xoz} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)ydv; \qquad M_{xoy} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)zdv;$$

$$M_{yoz} = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)xdv.$$

1.3. Нахождение моментов инерции

Момент инерции точки относительно оси, другой точки или плоскости равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси, другой точки, плоскости.

Вычисление момента инерции точки плоской области (рис. 23) относительно осей координат OX, OY и точки начала координат:

$$I_{ox} = \iint\limits_D y^2\rho ds; \quad I_{oy} = \iint\limits_D x^2\rho ds; \quad I_o = \iint\limits_D (y^2+x^2)\rho ds.$$

Вычисление момента инерции в случае пространственного тела относительно начала координат $I_0 = \iiint\limits_R (x^2 + y^2 + z^2)\rho dv$ и относительно осей координат

$$I_{ox} = \iiint\limits_R \left(y^2 + z^2\right)\rho dv; \quad I_{oy} = \iiint\limits_R \left(x^2 + z^2\right)\rho\, dv; \quad I_{oz} = \iiint\limits_R \left(y^2 + x^2\right)\rho\, dv.$$

Вычисление момента инерции в случае пространственного тела (R) относительно координатных плоскостей

$$I_{xoy} = \iiint\limits_R z^2 \rho dv; \qquad I_{yoz} = \iiint\limits_R x^2 \rho dv; \qquad I_{xoz} = \iiint\limits_R y^2 \rho dv.$$

1.4. Нахождение координат центра тяжести

Центр тяжести обладает следующим свойством: если массу фигуры поместить в центр тяжести, то статистические моменты полученной точки будут такими же, как и всей фигуры.

Найдем координаты центра тяжести пластины (D), масса которой есть $m(D) = \iint\limits_D \rho(x, y)ds$. Если массу $m(D)$ поместить в центр тяжести $C(x_c; y_c)$ (рис. 24), то статические моменты всей пластины относительно оси OX или относительно оси OY будут равны статическим моментам точки $C(x_c; y_c)$ и равны: $M_{ox} = m(D) \cdot y_c$, $M_{oy} = m(D) \cdot x_c$. Найдем координаты центра тяжести: $x_c = \dfrac{M_{oy}}{m(D)}$ и $y_c = \dfrac{M_{ox}}{m(D)}$ или

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \rho(x, y)xds}{\iint\limits_D \rho(x, y)ds}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_D \rho(x, y)yds}{\iint\limits_D \rho(x, y)ds};$$

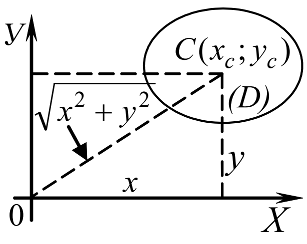

Рис. 24

Аналогично находятся координаты центра тяжести для плоской кривой (L).

В случае пространственной фигуры: тела (R), аналогично, получим формулы для нахождения координат центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_{yoz}}{m(R)} = \frac{\iiint\limits_R x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_R \rho(x,y,z)dv}; \quad y_c = \frac{M_{xoz}}{m(R)} = \frac{\iiint\limits_R y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_R \rho(x,y,z)dv};$$

$$z_c = \frac{M_{xoy}}{m(R)} = \frac{\iiint\limits_R z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_R \rho(x,y,z)dv}.$$

2. Решение задач

Пример 1. Найти массу пластины (D), ограниченной линиями $r = 2\cos\varphi$, $r = 2(1+\cos\varphi)$, $y = x$, $y = 0$, если плотность в каждой точке равна расстоянию от точки до полюса $\rho = r$.

Решение. Уравнение $r = 2\cos\varphi$ представляет уравнение окружности в полярной системе координат; построим ее, задавая значения угла φ.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	π
r	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2

Уравнение $r = 2(1+\cos\varphi)$ представляет уравнение кардиоиды в полярной системе координат, построим ее, задавая значения угла φ.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	π	$\pi+\frac{\pi}{4}$	$\pi+\frac{\pi}{2}$
r	4	$2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	2	$2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	0	$2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	2

Используя формулы перехода к полярной системе координат для уравнений $y = x$, $y = 0$, получим $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 0$. Построим в полярной системе координат область D (рис. 25). Для нахождения массы пластины воспользуемся двойным интегралом в полярной системе координат:

$$m(D) = \iint\limits_D \rho ds = = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} r \cdot r dr = = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[8(1+\cos\varphi)^3 - 8\cos^3\varphi\right] d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 3\cos\varphi + 3(\frac{1+\cos 2\varphi}{2})\, d\varphi =$$

$$\frac{8}{3}(\varphi + 3\sin\varphi + 3(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}))\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

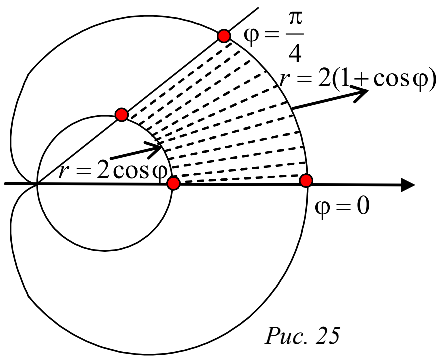

Рис. 25

$$= \frac{8}{3}(\frac{5\varphi}{2} + 3\sin\varphi + \frac{3\sin 2\varphi}{4}))\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3}(\frac{5}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}) = \frac{5\pi}{3} + 4\sqrt{2} + 2.$$

Пример 2. Вычислить статический момент относительно плоскости XOY однородной фигуры ограниченной поверхностями: $y = \sqrt{x}$, $x + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$.

Решение. Статический момент пространственного тела относительно плоскости XOY равен $M_{xoy} = \iiint\limits_{(R)} z dv$. Плотность у однородного тела равна единице. Фигура образована цилиндрической поверхностью $y = \sqrt{x}$ с направляющей $y = \sqrt{x}$ (ветка парабола) и образующей параллельной оси OZ, которая ограничена тремя плоскостями: 1) $x+z=1$ – плоскость параллельна оси OY; 2) $z=0$ – плоскость XOY; 3) $y=0$ – плоскость XOZ (рис. 26).

Из построенной фигуры видно (рис. 26), что область (D) находится в плоскости XOY, она изображена отдельно на рис. 26, *б*. Из условия задачи следует, что переменная z изменяется от значений $z=0$ до значений $z=1-x$. Пределы двойного интеграла будем расставлять по области D (рис. 26, *б*). Внешний инте-

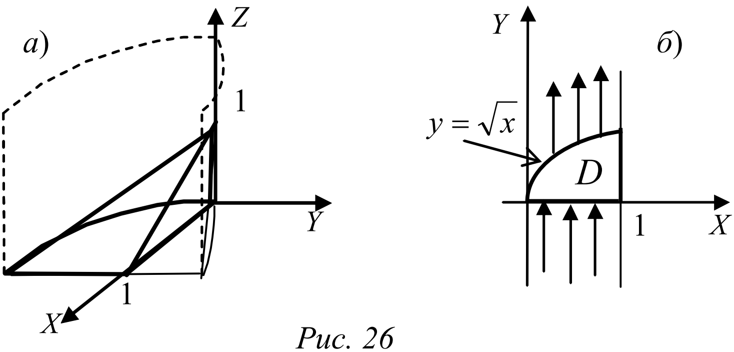

Рис. 26

грал будем вычислять по переменной x, которая изменяется от $x=0$ до $x=1$. Внутренний – по переменной y в пределах от $y=0$ до $y=\sqrt{x}$, в результате получим:

$$M_{xoy} = \iiint\limits_{(R)} z dv = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^{1-x} z dz = \iint\limits_{(D)} dxdy \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\iint\limits_{(D)} (1-x)^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 dxy\Bigg|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 \sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-2x+x^2)\sqrt{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 2\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{8}{105}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В задачах №№ **1–10** вычислить двойной интеграл по области D. Построить область.

1. $\iint\limits_D xdxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(1;1)$ и $B(0;1)$.

2. $\iint\limits_D xdxdy$, где D – ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;0)$ и $B(0;2)$, прямой $y=0$ и кривой $x=\sqrt{y}$.

3. $\iint\limits_D xydxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(10;1)$ и $B(1;1)$.

4. $\iint\limits_D e^x ydxdy$, где D: $y^2 = x, \quad x=0, \quad y=1$.

5. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где D: $y=x^2, \quad y=\sqrt{x}$.

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D: $y=x, \quad y=2-x, \quad x=0$.

7. $\iint\limits_D xydxdy$, где D – трапеция с вершинами $C(4;2)$, $D(5;1)$, $A(1;1)$ и $B(2;2)$.

8. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где D: $y=-x^2, \quad y=-\sqrt{x}$.

9. $\iint\limits_D (4-y)dxdy$, где D: $4y=x^2, \quad y=1, \quad x=0\ (x>0)$.

10. $\iint\limits_D ydxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(-1;1)$ и $B(1;1)$.

В задачах №№ **11–20** изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Изобразить область интегрирования.

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$ **12.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

13. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$

14. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)dy$

15. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{\frac{3y}{4}} f(x,y)dx$

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{2-y^2}}^{4-3y} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$

19. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y^2}}^{-3y+4} f(x,y)dx$

20. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

В задачах №№ **21-30** вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданной линией.

21. $x^2 + y^2 = 2x$.

22. $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

23. $(x^2 + y^2)^2 = 16$.

24. $9x^2 + 9y^2 = 4x$.

25. $(6x^2 + 6y^2)^2 = 9y^3$.

26. $x^2 + y^2 = 4y$.

27. $(x^2 + y^2)^2 = 4x^3$.

28. $(x^2 + y^2)^2 = 81$.

29. $5x^2 + 5y^2 = 9y$.

30. $(2x^2 + 2y^2)^2 = 16x^3$.

В задачах №№ **31-40** вычислить объем пространственного тела, ограниченного указанными поверхностями.

31. $z = 0, \quad z = x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{25 - y^2}$.

32. $z = 0, \quad z = 9 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 9$.

33. $z = 0, \quad z = 4 - x - y, \quad x^2 + y^2 = 4$.

34. $z = 0, \quad z = y^2, \quad x^2 + y^2 = 9$.

35. $z = 0, \quad z + y = 2, \quad x^2 + y^2 = 4$.

36. $z = 0, \quad 4z = y^2, \quad 2x - y = 0, \quad x + y = 9$.

37. $z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4$.

38. $z = 0, \quad z = 1 - y^2, \quad x = y^2, \quad x = 2y^2 + 1$.

39. $z=0,\quad z=1-x^2,\quad y=0,\quad y=3-x$.

40. $z=0,\quad z=4\sqrt{y},\quad x=0,\quad 4=y+x$.

В задачах №№ **41-50** вычислить криволинейные интегралы. Сделать чертеж.

41. $\int\limits_L \frac{dl}{y-x}$, где L – отрезок прямой $y=3x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(2,4)$.

42. Найти длину кардиоиды: $r=a(1+\cos\varphi)$.

43. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, где L– окружность $x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

44. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

45. $\int\limits_L \sqrt{4y+1}dl$, где L – дуга параболы $y=x^2$ заключенная от точки $A(1,1)$ до $B(2,4)$.

46. $\int\limits_{O\grave{A}} y(x-y)dx+xdy$ по кривой $y=2x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.

47. $\int\limits_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy,$ где L − дуга параболы $y=x^2,\ -1\le x\le 1.$

48. $\int\limits_L (2-y)\,dx+x\,dy,$ где L − арка циклоиды $x=t-\sin t,$ $y=1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$.

49. $\int\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$, вдоль ломаной $L=OAB$, где $O(0,0),\quad A(2,0),\quad B(4,5)$.

50. $\int\limits_L ydx+xdy$, где L − четверть эллипса $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ от $t=0$ до $t=\pi/2$.

В задачах №№ **51-60** вычислить статический момент относительно плоскости XOY однородных фигур, ограниченных поверхностями. Построить фигуру.

51. Пирамида $O(0,0,0),\ A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1)$.

52. Цилиндр $x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3$.

53. Поверхностями $x + z = 3,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0,\ z = 0$.

54. Поверхностями $z = x^2 + y^2$, и $x^2 + y^2 = 4$ и $z = 0$.

55. Конической поверхностью $z^2 = x^2 + y^2$ и $x = 0,\ x = 4$.

56. Поверхностями: $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ и $z = 0$.

57. Поверхностями: $z = y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 3y = 6$.

58. Поверхностями: $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$.

59. Параболоидом $z = x^2 + y^2$, и плоскостью $z = 1$.

60. Плоскостями $x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

ТАБЛИЦА КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в задание на контрольную работу. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номера задач контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – Т. 2. – 544 с.

2. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Кратные интегралы. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов / И.А. Соловьев [и др.]. – СПб.: Лань, 2009. – 445 с.

3. Курс высшей математики. Кратные интегралы. Векторный анализ. Лекции и практикум: учебное пособие для вузов по направлению «Технические науки», «Техника и технологии» / И.М. Петрушко [и др.] – СПб.: Лань, 2008. – 317 с.

4. Математический анализ в вопросах и задачах: учебное пособие / В.Ф. Бутузов [и др.]. – СПб.: Лань, 2008. – 480 с.

5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009. – 420 с.

Дополнительная литература

1. Хавинсон, С.Я. Лекции по интегральному исчислению: учебное пособие для втузов / С.Я. Хавинсон. – М.: Высш. школа, 1976. – 198 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ