Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный архитектурно-строительный университет

А.В. Григорьев

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издательство Томского государственного
архитектурно-строительного университета

Томск 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с установлением в нашей стране рыночных отношений все большему кругу лиц становится необходимым умение выполнять вычисления, связанные с планированием и анализом финансовых операций. Финансовая математика есть инструмент, который позволяет проводить такие расчеты и объективно оценивать последствия принимаемых в финансовой и коммерческой деятельности решений и, следовательно, находить наилучшие решения. Финансовая математика является одной из составляющих многих экономических дисциплин, таких как финансовый менеджмент, бухгалтерский учет, коммерческое дело и др.

Настоящее учебное пособие предназначено для первоначального знакомства студентов младших курсов с финансовой математикой. Поэтому работа с ним не требует каких-либо специальных знаний по экономике. Из математических дисциплин достаточно школьного курса элементарной математики и понятия предела последовательности. В пособии рассматриваются основы финансовых расчетов, связанных с начислением процентов, дисконтированием, учетом инфляции, финансовыми рентами и облигациями.

В пособии приводится большое число примеров финансовых расчетов и задачи для самостоятельного решения, помещенные непосредственно после изложения соответствующего теоретического материала. Для проверки усвоения материала курса предлагаются контрольные вопросы и 25 вариантов контрольных заданий, включающих по 30 задач каждый. Все примеры и задачи взяты из литературных источников, указанных в списке рекомендуемой литературы.

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Финансовая математика имеет дело с финансами, т.е. с денежными средствами, которыми располагают частные лица, предприятия, учреждения и государство. Основная цель науки о финансах состоит в изучении того, как эти ограниченные денежные средства распределяются во времени. Другими видами распределения денежных средств (по регионам, отраслям, предприятиям) занимаются экономические науки. Движение денег во времени сопровождается изменением их ценности или стоимости. Общий финансовый принцип влияния времени на стоимость денег можно сформулировать так: *одна и та же сумма денег в различные моменты времени имеет разную ценность; с другой стороны, по отношению к определенным условиям разные суммы денег в разные моменты времени могут быть равноценны в финансово-экономическом смысле.*

Зависимость стоимости денег от времени обусловлена не только и не столько инфляцией, сколько тем, что деньги являются капиталом и могут приносить доход, например, при помещении их в банк.

Сопоставление стоимостей денег в разные моменты времени может выполняться только относительно конкретных финансовых операций, проводимых в определенных условиях.

Построение математических моделей сопоставления стоимостей денег в различные моменты времени или, другими словами, математических моделей финансовых операций и процессов, а также анализ этих моделей составляют предмет финансовой математики.

К основным задачам финансовой математики относятся:

– расчет конечных результатов финансовых операций;

– изучение зависимости результатов операции от ее параметров;

– расчет параметров эквивалентного изменения первоначальных условий операций.

Классическая финансовая математика рассматривает только детерминированные модели, или модели с полной информацией. Так называют модели, в которых фактор случайности полностью исключен и все параметры финансовой операции считаются известными, т.е. определены будущие значения всех временных и стоимостных характеристик изучаемых операций.

В то же время неопределенность и риск всегда присущи финансовым операциям. Поэтому современная финансовая математика включает в себя так называемую стохастическую финансовую математику, изучающую вероятностные модели финансовых операций.

2. БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Временная и денежная шкалы

Основными элементами финансовых моделей являются время и деньги. В сущности, финансовые модели в той или иной мере отражают количественные соотношения между денежными суммами, относящимися к разным моментам времени.

Для задания времени или, иначе говоря, для временной локализации денежных сумм необходимо ввести временную шкалу, т.е. задать начало отсчета и единицу измерения, называемую базовым или единичным периодом времени. В экономике единицей измерения времени является, как правило, год, хотя может быть и полугодие, квартал, месяц, день.

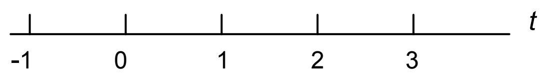


Рис. 2.1. Временная шкала

Выбор начала отсчета определяется конкретными условиями. Обычно точка 0 интерпретируется как текущий или настоящий момент времени, т.е. «сейчас».

Поскольку время обладает свойством непрерывности, то временная шкала также является непрерывной, т.е. время может задаваться любым вещественным числом. Непрерывная шкала времени используется в теории финансов, на практике же ограничиваются дискретной шкалой, представляющей собой дискретное множество точек, связанных с естественными календарными промежутками времени: годами, месяцами, днями.

Любые два различных момента времени t_1, t_2 определяют промежуток (отрезок, интервал) времени, который может содержать или не содержать точки t_1, t_2:

$$[t_1, t_2],\ (t_1, t_2),\ [t_1, t_2),\ (t_1, t_2].$$

Длина промежутка T определяется координатами начала и конца: $T = t_2 - t_1$.

Денежная шкала определяется заданием конкретной денежной единицы для измерения денежных сумм: рубль, доллар, евро и т.д. Денежная шкала по своей природе дискретна, поскольку любая денежная система предполагает минимальную денежную единицу, которая уже неделима (копейка, цент и т.п.). Денежные суммы могут быть как положительными, так и отрицательными. Положительные суммы рассматриваются как поступление (приход) денег, отрицательные – как расход для какого-либо участника сделки. Заметим, что в финансовой практике стараются избегать отрицательных сумм, хотя они удобны и используются в финансовых функциях табличного процессора Excel и систем компьютерной математики, например, MathCAD.

Временная и денежная шкалы вместе образуют финансовую систему координат, называемую также финансовым пространством или плоскостью "время – деньги".

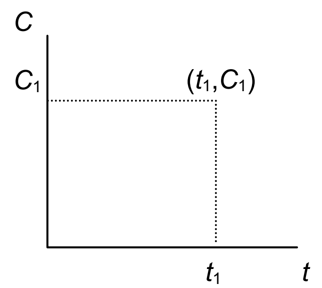


Рис. 2.2. Финансовая система координат

2.2. Финансовые события и денежные потоки

***Определение* 1.** Финансовым событием называется упорядоченная пара (t, C), состоящая из момента времени t и значения денежной суммы C.

Финансовое событие изображается точкой на плоскости "время – деньги" или точкой на временной шкале с указанием суммы C.

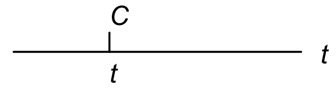


Рис. 2.3. Финансовое событие

На практике изолированные финансовые события рассматриваются редко. Представляющая интерес финансовая сделка включает не одно, а несколько событий.

***Определение* 2.** Последовательность $\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}$ финансовых событий (t_i, C_i) называется финансовым или денежным потоком и обозначается CF (cash flow).

Например, открытию счета в банке на 1000 долл. и последующему снятию с него в конце первого и второго годов 300 и 400 долл. соответствует финансовый поток

$$CF = \{(0, 1000), (1, -300), (2, -400)\}.$$

Денежный поток изображается либо последовательностью точек на временной шкале, либо точками на плоскости "время – деньги". Первое изображение называют временной диаграммой, а второе – графиком денежного потока.

3. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

3.1. Простая кредитная сделка

Кредитная сделка – это одна из основных финансовых операций. Кредитными сделками являются: открытие сберегательного счета в банке, выдача банком кредита, учет векселя и т.п. В общем случае простая кредитная сделка представляет собой единовременную выдачу некоторой суммы P (кредита) в виде денег или ценных бумаг и возврат в конце указанного срока этой суммы и дополнительной суммы I – процента за предоставление кредита.

В любой кредитной сделке участвуют два лица:

– *кредитор* – лицо, предоставившее в долг финансовые средства;

– *дебитор* (*заемщик*, *должник*) – лицо, получившее финансовые средства в свое распоряжение для временного их использования.

Кредитная сделка характеризуется следующими параметрами:

P – *сумма кредита* (основная сумма долга);

I – *проценты* за весь срок кредита (плата за кредит);

$S = P + I$ – *наращённая сумма* (полная сумма долга, сумма погашения), т.е. возвращаемая кредитору сумма;

i – *процентная ставка* (ставка наращения процентов) за определенный период; в расчетных формулах i обычно выражено в долях единицы, а не в процентах;

n – *срок ссуды*, т.е. промежуток времени, на который выдан кредит.

Пусть t_0 – дата выдачи кредита, а t_1 – дата погашения. Представление кредитной сделки временной диаграммой показано на рис. 3.1.

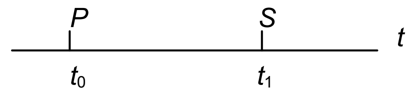


Рис. 3.1. Простая кредитная сделка

Таким образом, в простой кредитной сделке фигурируют два финансовых события: (t_0, P) – выдача кредита в сумме P в момент времени t_0 и (t_1, S) – погашение кредита в сумме S в момент времени $t_1 = t_0 + n$. Объединяя эти два события, получаем финансовый поток $CF = \{(t_0, P), (t_1, S)\}$, который описывает динамику простой кредитной сделки.

3.2. Формула простых процентов

Пусть срок кредита n измеряется в годах, а i означает годовую процентную ставку. На выданную сумму кредита P (основной капитал) каждый год начисляются проценты в сумме $P \cdot i$. Начисление за весь срок кредита составит

$$I = P \cdot n \cdot i.$$

Наращённая сумма, т.е. сумма, подлежащая возврату, вычисляется так:

$$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P \cdot (1 + n \cdot i).$$

Формула

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i)$$

называется формулой наращения по простым процентам или формулой простых процентов.

Величина $k = 1 + n \cdot i$ называется *коэффициентом* или *множителем наращения* по простым процентам. Множитель наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма больше суммы кредита: $k = S/P$.

Наращение по простым процентам (схема простых процентов) обычно применяется при краткосрочных ссудах, когда срок сделки не превышает одного года, а также в тех случаях, когда начисленные проценты периодически выплачиваются кредитору.

Заметим, что величина n в формуле простых процентов может быть дробным числом. Так, при годовой процентной ставке i и сроке кредита 3 месяца $n = 1/4$, при сроке 1 месяц $n = 1/12$.

Задачи

3.1. Банк принимает вклады по простой ставке 40% годовых. Определить сумму начисленных процентов и сумму долга с начисленными процентами на вклад 2000 руб., размещенный на полгода.

Ответ: 400 руб.; 2400 руб.

3.2. Определить возвращаемую сумму и проценты, если ссуда 400 тыс. руб. выдана на два года под простые 30% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при увеличении процентной ставки в два раза?

Ответ: 640 тыс. руб.; 240 тыс. руб.; 1,375.

3.3. Практика начисления процентов при задании срока кредита в днях

Если срок кредита указывается в днях, то $n = t/K$, где t – число дней ссуды, K – число дней в году (временная база начисления процентов). Используются две временные базы: K = 360 дней и K = 365 (366) дней. В первом случае начисляемые проценты называют *обыкновенными* (или *коммерческими*), во втором случае – *точными*.

При заключении кредитных сделок указывают обычно дату выдачи кредита ∂_1 и дату его погашения ∂_2. Тогда точное число дней ссуды определяется как число дней между этими двумя датами (включая сами даты); день выдачи и день погашения считаются за один день. Например, кредит выдан 4 мая, погашается 20 мая. Количество дней между этими датами – 17 (включая 4-е и 20-е числа). Срок ссуды 17 – 1 = 16 дней.

Для упрощения подсчета точного числа дней между двумя датами можно пользоваться таблицей порядковых номеров дней в году (см. приложение). Срок ссуды определяется как разность между порядковыми номерами: $N(\partial_2) - N(\partial_1)$. Если год високосный и дата 29.02 оказывается между датами ∂_1 и ∂_2, то к сроку прибавляется один день.

Пример. Определить срок кредита с датой выдачи 20.01 и датой погашения 05.10 (год невисокосный).

Решение. По таблице находим $N(20.01) = 20$, $N(05.10) = 278$. Срок кредита 278 – 20 = 258 дней.

Число дней ссуды можно находить приближенно, полагая, что каждый месяц года содержит 30 дней. Приближенное число дней между 20.01 и 05.10 находим так:

$$11 + 30 \cdot 8 + 5 - 1 = 255.$$

На практике используют следующие три варианта расчета процентов:

– обыкновенные проценты с приближенным числом дней, так называемая германская практика (360/360);

– обыкновенные проценты с точным числом дней, так называемая французская практика или банковское правило (365/360 или АСТ/360);

– точные проценты с точным числом дней, так называемая английская практика (365/365 или АСТ/АСТ).

Пример. Определить сумму процентов при разных практиках их начисления, если вклад 2000 руб. был размещен под 40% годовых на срок с 10 января по 5 сентября 2001 года.

Решение.

а) Германская практика:

$$K = 360; \quad t = 30 \cdot 7 + 21 + 5 - 1 = 235;$$

$$I = P \cdot \frac{t}{K} \cdot i = 2000 \cdot \frac{235}{360} \cdot 0{,}4 = 522{,}2 \text{ руб.}$$

б) Французская практика:

$$K = 360; \quad t = N(05.09) - N(10.01) = 248 - 10 = 238;$$

$$I = P \cdot \frac{t}{K} \cdot i = 2000 \cdot \frac{238}{360} \cdot 0{,}4 = 528{,}9 \text{ руб.}$$

в) Английская практика:

$$K = 365; \quad t = 238;$$

$$I = P \cdot \frac{t}{K} \cdot i = 2000 \cdot \frac{238}{365} \cdot 0{,}4 = 521{,}6 \text{ руб.}$$

Задачи

3.3. Банк принимает вклады на срочный депозит на следующих условиях: годовая процентная ставка при сроке 35 дней – 45%; при сроке 65 дней – 48%; при сроке 90 дней – 50%. Рассчитать доход клиента при вкладе 10 млн. руб. на указанные сроки. Год невисокосный. Методика расчета – точные проценты с точным числом дней.

Ответ: 431,507 тыс. руб.; 854,795 тыс. руб.; 1232,877 тыс. руб.

3.4. Банк выдал кредит в размере 10 тыс. руб. на срок с 3 февраля до 3 декабря под простые 24% годовых; год високосный. Определить возвращаемую сумму при разных вариантах начисления процентов.

Ответ: 11,993 тыс. руб. (365/365); 12,026 тыс. руб. (365/360); 12 тыс. руб. (360/360).

3.5. Вклад в размере 200 тыс. руб. был положен в банк 6 февраля и востребован 20 декабря 2001 года. Процентная ставка – простые 80% годовых. Определить проценты при разных вариантах начисления.

Ответ: 138,959 тыс. руб. (365/365); 140,889 тыс. руб. (365/360); 139,556 тыс. руб. (360/360).

3.4. Обобщения формулы простых процентов

Начисление процентов при переменной процентной ставке. Пусть в течение срока n_1 процентная ставка была равна i_1, в течение следующего срока n_2 – i_2 и т.д. Тогда за весь срок кредита $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right).$$

Начисление процентов при изменении суммы депозита. *Депозит* – это денежные средства, принятые банком на хранение. Если в процессе хранения вклада производится поступление или снятие средств, то сумма процентов вычисляется по формуле

$$I = \sum_{k=1}^{m} P_k n_k i_k,$$

где P_k – остаток средств на счете после очередного поступления или снятия средств, n_k – срок хранения суммы до нового изменения остатка средств на счете.

Задачи

3.6. Кредит в размере 20 тыс. руб. выдан на 2,5 года. Ставка простых процентов за первый год 50% годовых, а в каждом последующем полугодии увеличивается на 10%. Определить наращенную сумму долга на конец срока кредита.

Ответ: 51 тыс. руб.

3.7. Клиент поместил в банк 3 млн. руб. 1 февраля. Процентная ставка банка с 1 февраля по 18 февраля – 60% годовых; с 19 февраля по 7 марта – 56%; с 8 марта по 23 марта – 53%; с 24 марта по 19 апреля, когда был изъят вклад, – 48%. Определить доход клиента и эффективную процентную ставку. Методика расчета: обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

Ответ: 349,333 тыс. руб.; 53,7%.

3.8. Сберегательный счет был открыт 15 февраля, и на него была положена сумма 5 тыс. руб. 10 апреля на счет поступила сумма 3 тыс. руб. Затем 20 мая со счета были сняты 2 тыс. руб. 1 сентября добавлена 1 тыс. руб., а 4 декабря счет был закрыт. Определить сумму, полученную владельцем счета, если процентная ставка – простые 12% годовых, год невисокосный, способ расчета – 365/360.

Ответ: 7,624 тыс. руб.

3.5. Погашение задолженности частями

Кредиты иногда погашаются рядом промежуточных платежей. Здесь возникает вопрос о том, на какую сумму производить начисление процентов и как определять остаток долга. Существуют два метода решения этой задачи: *актуарный метод*, который применяется в операциях со сроком более года, и *правило торговца*, применяемое при сроке операции менее года. В обоих методах при начислении процентов используются, как правило, обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разность идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то он никак не отражается на основной сумме долга и приплюсовывается к следующему платежу. Последний платеж в конце срока кредита определяется из условия, что долг должен быть полностью погашен.

Пример. Кредит на сумму 15 млн. руб. выдан на 1,5 года (с 12.03.99 по 12.09.00) под 20% годовых. В счет погашения кредита произведены следующие выплаты:

12.06.99 – 500 тыс. руб.,
12.06.00 – 5 млн. руб.,
30.06.00 – 8 млн. руб.

Найти сумму платежа в конце срока.

Решение. Долг с процентами на 12.06.99:

$$S_1 = 15000 \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}2\right) = 15750 \text{ тыс. руб.}$$

Так как поступившая сумма 500 тыс. руб. меньше начисленных процентов (15750 – 15000 = 750 тыс. руб.), то она присоединяется к следующему платежу и не изменяет суммы основного долга.

Долг с процентами на 12.06.00:

$$S_2 = 15000 \cdot \left(1 + \frac{15}{12} \cdot 0{,}2\right) = 18750 \text{ тыс. руб.}$$

Поступившая сумма (5000 + 500 = 5500 тыс. руб.) больше начисленных процентов (18750 – 15000 = 3750 тыс. руб.), поэтому основной долг, на который начисляются проценты, становится равным 18750 – 5500 = 13250 тыс. руб.

Долг с процентами на 30.06.00:

$$S_3 = 13250 \cdot \left(1 + \frac{18}{360} \cdot 0{,}2\right) = 13382{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

После поступления 8000 тыс. руб. основная сумма долга становится равной 13382,5 – 8000 = 5382,5 тыс. руб.

Наращенная к концу срока сумма

$$S_4 = 5382{,}5 \cdot \left(1 + \frac{72}{360} \cdot 0{,}2\right) = 5597{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

и есть сумма последнего платежа.

Правило торговца предусматривает, что сумма долга с процентами остается неизменной до полного погашения в конце срока кредита. В то же время происходит накопление суммы частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами. Последний платеж должен быть равен разности между наращенными суммами долга и частичных платежей:

$$Q = P \cdot (1 + n \cdot i) - \sum_{k=1}^{m} R_k (1 + n_k i),$$

где R_k – сумма k-го частичного платежа, n_k – промежуток времени от момента k-го платежа до конца срока ссуды.

Пример. Кредит на сумму 1,5 млн. руб., выданный 10.08.99, должен быть погашен 10.06.00. Ссуда выдана под 20% годовых. В счет погашения долга 10.12.99 поступило 800 тыс. руб. Найдем остаток долга на конец срока.

Решение. Срок ссуды n = 10/12 года, промежуток времени от момента частичного платежа до конца срока ссуды n_1 = 6/12 года. Остаток долга на конец срока

$$Q = 1500 \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}2\right) - 800 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}2\right) = 870 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

3.9. Кредит на сумму 400 тыс. руб. выдан 6 февраля 2001 года до 6 февраля 2003 года под простые 25% годовых. В счет погашения кредита произведены следующие выплаты: 7 июля 2001 года – 40 тыс. руб.; 10 ноября 2001 года – 160 тыс. руб.; 24 июля 2002 года – 150 тыс. руб. Найти сумму последнего погасительного платежа. Использовать актуарный метод и банковское правило 365/360.

Ответ: 200,28 тыс. руб.

3.10. Кредит на сумму 90 тыс. руб., выданный 12 марта 2000 года под простые 20% годовых, должен быть погашен 12 сентября того же года. В счет погашения долга 5 июня поступило 30 тыс. руб., а 2 августа – 40 тыс. руб. Найти остаток долга на конец срока кредита. Используется правило торговца и точные проценты с точным числом дней.

Ответ: 26,548 тыс. руб.

3.6. Потребительский кредит

Потребительским кредитом называют кредит, который предоставляется частному лицу на потребительские цели. Широко распространенной формой такого кредита является продажа товара в рассрочку.

В потребительском кредите проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Погашение долга с процентами производится равными суммами на протяжении всего срока кредита. Таким образом, наращенная сумма долга равна

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i),$$

а величина разового погасительного платежа

$$R = \frac{S}{n \cdot m},$$

где P – сумма кредита, m – число платежей в году.

В потребительском кредите фактическая процентная ставка оказывается больше ставки i, предусмотренной при оформлении кредита, поскольку величина долга с каждым платежом уменьшается, а проценты уже начислены на первоначальную сумму P.

Пример. Товар ценой в 3 тыс. руб. продается в кредит на 2 года под 12% годовых с ежеквартальными равными погасительными платежами (начисляются простые проценты). Определить долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа.

Решение. Долг с процентами (наращённая сумма):

$$S = 3000 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}12) = 3720 \text{ руб.}$$

Проценты: $I = 3720 - 3000 = 720$ руб.

Разовые ежеквартальные платежи:

$$R = \frac{3720}{2 \cdot 4} = 465 \text{ руб.}$$

Задача

3.11. Товар стоимостью 120 тыс. руб. куплен в рассрочку. Покупатель оплатил при покупке третью часть стоимости товара. Оставшуюся сумму, на которую сразу начислены проценты по простой ставке 12% годовых, покупатель выплачивает равными ежемесячными платежами в течение полугода. Найти размер ежемесячного платежа.

Ответ: 14,133 тыс. руб.

3.7. Дисконтирование по простым процентам

При заключении финансовых соглашений часто приходится решать задачу, обратную задаче нахождения наращенной суммы, когда по заданной сумме S, которую предполагают получить через время n, надо найти начальную сумму P. Аналогичная задача возникает и в том случае, когда проценты с суммы S удерживаются сразу при выдаче кредита.

В этих случаях говорят, что сумма S *дисконтируется* (или *учитывается*), сам процесс начисления процентов и их

удержание называют *учетом*, а удержанные проценты – *дисконтом* D.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют *приведенной* или *современной* стоимостью будущего платежа S; используются также термины *текущая*, *капитализированная* стоимость.

В зависимости от вида используемой при дисконтировании процентной ставки различают математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

При ***математическом дисконтировании*** величина капитала P, который при наращении по простым процентам через n лет даст сумму S, вычисляется через процентную ставку наращения i по формуле

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot i},$$

вытекающей из формулы простых процентов.

Величина

$$v = \frac{1}{1 + n \cdot i}$$

называется *дисконтным* (*дисконтирующим*) множителем.

Таким образом, разность $S - P$ можно рассматривать в зависимости от ситуации либо как проценты, начисленные на сумму P, либо как дисконт с суммы S.

Банковское дисконтирование (банковский учет) применяется при так называемом учете векселей банком или другим финансовым учреждением. Далее рассмотрим эту операцию подробнее.

Задачи

3.12. Номинальная стоимость векселя со сроком погашения 6 месяцев равна 55 тыс. руб. Проценты начислялись по простой процентной ставке 20% годовых. Какая сумма выдана заемщику? Чему равен дисконт?

Ответ: 50 тыс. руб.; 5 тыс. руб.

3.13. Через полгода после выдачи кредита должник обязан заплатить 2,14 тыс. руб. Какова сумма выданного кредита, если он выдан под простую процентную ставку 14% годовых? Чему равен дисконт?

Ответ: 2 тыс. руб.; 0,14 тыс. руб.

3.8. Банковский учет векселей

Вексель является безусловным письменным обязательством векселедателя (заемщика) выплатить в установленный срок определенную сумму предъявителю векселя или лицу, указанному в векселе. Обычно в векселе указывается сумма S к погашению, т.е. сумма с уже начисленными процентами, ее называют *номинальной стоимостью* векселя

Рассмотрим наиболее частую операцию с векселем, когда владелец векселя (векселедержатель) предлагает банку раньше срока оплаты векселя купить его. Такая покупка осуществляется по цене меньшей, чем указанная в векселе сумма. Эту операцию называют учетом векселя. Сумму, которую получает при этом векселедержатель, называют *дисконтированной стоимостью векселя*.

При банковском учете проценты в виде дисконта начисляются на сумму S, подлежащую уплате в конце срока векселя. Если проценты начисляются по так называемой *простой учетной ставке d,* то величина дисконта (суммы учета) равна

$$D = S \cdot n \cdot d,$$

где n – срок от момента учета до даты погашения векселя, d – годовая учетная ставка.

Сумма, выплачиваемая владельцу при учете векселя:

$$P = S(1 - n \cdot d).$$

Величина

$$v = 1 - n \cdot d$$

представляет собой дисконтный множитель.

Учет векселей обычно выполняется по банковскому правилу 365/360.

Пример. Вексель на сумму 100 тыс. руб. со сроком погашения 12 ноября 1997 г. предъявлен в банк 13 сентября 1997 г. Банк согласен учесть вексель по простой учетной ставке 12% годовых. Какую сумму получит владелец векселя?

Решение. S = 100; d = 0,1.

$$n = t / K = [N(12.11) - N(13.09)] / 360 = (316 - 256) / 360 = 1/6;$$

$$P = S \cdot (1 - n \cdot d) = 100 \cdot [1 - (1/6) \cdot 0{,}12] = 98 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

3.14. Номинальная стоимость векселя 20 тыс. руб. Банк учел этот вексель за 3 месяца до погашения по простой учетной ставке 40% годовых. Какую сумму получил владелец векселя?

Ответ: 18 тыс. руб.

3.15. Владелец векселя учел его в банке за 2 месяца до погашения, получив 132 тыс. руб. Учетная ставка банка – простые 72% годовых. Определить номинальную стоимость векселя и дисконт банка.

Ответ: 150 тыс. руб.; 18 тыс. руб.

3.16. Вексель номинальной стоимостью 1000 руб. с датой погашения 10 декабря предъявлен в банк для учета 20 октября того же года. Учетная ставка банка – простые 25% годовых. Определить сумму, выплаченную владельцу векселя, и дисконт при германской практике расчетов.

Ответ: 965,28 руб.; 34,72 руб.

3.9. Эквивалентность процентной и учетной ставок. Эффективная ставка простых процентов

При математическом дисконтировании приведенная (дисконтированная) сумма P вычисляется через наращенную сумму S с использованием процентной ставки (ставки наращения) i. Точно так же можно вычислять наращенную сумму S через приведенную сумму P с помощью учетной ставки d:

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d}.$$

Потребуем равенства множителя наращения в этой формуле $1/(1 - n \cdot d)$ введенному ранее множителю наращения $k = 1 + n \cdot i$:

$$1 + n \cdot i = \frac{1}{1 - n \cdot d}.$$

Ставки i и d, связанные этим соотношением, называются *эквивалентными*, так как они приводят к одинаковому финансовому результату. Из последнего равенства получим формулы, выражающие одну эквивалентную ставку через другую:

$$i = \frac{d}{1 - n \cdot d}, \quad d = \frac{i}{1 + n \cdot i}.$$

Заметим, что эквивалентные ставки определяются с учетом промежутка времени n.

Пример. Найти учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке 19%, при наращении капитала за год и за 2 года.

Решение. $i = 0{,}19$.

$$а) \quad n = 1; \quad d = \frac{0{,}19}{1 + 0{,}19} = 0{,}15966 \quad (15{,}97\%);$$

$$б) \quad n = 2; \quad d = \frac{0.19}{1 + 2 \cdot 0{,}19} = 0{,}13768 \quad (13{,}77\%).$$

Годовая процентная ставка является характеристикой доходности финансовой операции. Поэтому годовую процентную ставку, эквивалентную формально применяемой в некоторой финансовой операции ставке, называют *эффективной процентной ставкой* данной операции.

При выдаче кредитов и при учете векселей банк часто удерживает так называемые комиссионные, составляющие некоторый процент q от суммы кредита или от номинальной стоимости векселя. В этих случаях фактическая (эффективная) процентная ставка i_e превышает объявленную, формально используемую процентную ставку.

Приравнивая множители наращения, выраженные через формальную и эффективную процентные ставки:

$$1 + n \cdot i = (1 - q) \cdot (1 + n \cdot i_e),$$

получаем выражение для эффективной ставки:

$$i_e = \frac{n \cdot i + q}{n \cdot (1 - q)}.$$

Приравнивая соответствующие дисконтные множители:

$$1 - n \cdot d - q = \frac{1}{1 + n \cdot i_e},$$

приходим к следующему выражению:

$$i_e = \frac{n \cdot d + q}{n \cdot (1 - n \cdot d - q)}.$$

Задачи

3.17. Вексель учтен в банке по простой учетной ставке 30% годовых за полгода до даты погашения. Определить эквивалентное значение простой годовой процентной ставки (эффективной ставки), характеризующей доходность операции.

Ответ: 35,29%.

3.18. Вексель учтен в банке за 100 дней до срока оплаты по простой учетной ставке 40% годовых при расчетном количестве дней в году 360. Определить доходность операции учета по эквивалентной годовой ставке простых процентов для расчетного количества дней в году 365.

Ответ: 45,62%.

3.19. Срок платежа по векселю составляет 2 года. Эффективность операции учета в банке должна составлять 150% годовых по простой процентной ставке. Определить эквивалентное значение простой годовой учетной ставки.

Ответ: 37,5%.

3.20. До срока погашения векселя осталось 50 дней. Банк использует при выдаче кредитов простую ставку 120% годовых. Определить эквивалентное значение годовой учетной ставки, если расчетное количество дней в году при начислении процентов по кредиту равно 365, а при учете векселей – 360 дней.

Ответ: 101,65%.

3.21. Владелец векселя учел его в банке за 60 дней до погашения по простой годовой учетной ставке 30%. Банк удерживает комиссионные в размере 0,8% от номинальной стоимости векселя. Определить доходность этой сделки по эффективной ставке простых процентов, если в расчетах используется банковское правило.

Ответ: 36,94%.

3.22. Предприятие получило кредит на 3 года под простую процентную ставку 48% годовых. Комиссионные составляют 5% от суммы кредита. Определить эффективную процентную ставку кредита.

Ответ: 52,28%.

3.23. Вексель номинальной стоимостью S со сроком погашения t_1 дней учтен банком по простой годовой учетной ставке d_1. Через некоторое время, за t_2 дней до срока погашения, банк продает этот вексель другому банку по простой годовой учетной ставке d_2. Получить формулы для дохода первого банка от этой операции и для эффективной процентной ставки перепродажи.

Ответ: $Д = S \cdot \dfrac{t_1 d_1 - t_2 d_2}{K}$; $i_e = \dfrac{(t_1 d_1 - t_2 d_2) \cdot K}{(t_1 - t_2) \cdot (K - t_1 d_1)}$.

3.24. Вексель номинальной стоимостью 20 млн. руб. учтен банком за 60 дней до погашения по простой учетной ставке 42% годовых. Через 12 дней этот вексель продан по учетной ставке 40% годовых. Определить доход банка и доходность сделки по эффективной ставке простых процентов, если используется банковское правило.

Ответ: 333,333 тыс. руб.; 53,76%.

3.10. Определение срока ссуды и величины ставки

При разработке условий контрактов приходится решать такие задачи, как нахождение по заданным суммам процентных и учетных ставок или срока ссуды.

Формулы для расчета этих параметров кредитной сделки выводятся из формул простых процентов наращения и дисконтирования:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i); \quad P = S \cdot (1 - n \cdot d).$$

Отсюда находим:

– срок ссуды в годах

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i} = \frac{S / P - 1}{i}; \quad n = \frac{S - P}{S \cdot d} = \frac{1 - P / S}{d};$$

– срок ссуды в днях

$$t = \frac{S-P}{P \cdot i} \cdot K; \quad t = \frac{S-P}{S \cdot d} \cdot K;$$

– годовую процентную ставку

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \frac{S-P}{P \cdot t} \cdot K;$$

– годовую учетную ставку

$$d = \frac{S-P}{S \cdot n} = \frac{S-P}{S \cdot t} \cdot K.$$

Пример 1. Определить время, за которое первоначальный капитал в 3 тыс. руб. при простых процентах возрастет до 3,6 тыс. руб., если используется а) процентная ставка в 10%; б) учетная ставка в 10%.

Решение. $P = 3$; $S = 3{,}6$;

а) i=0,1; $n = \frac{3{,}6-3}{3 \cdot 0{,}1} = 2$ года;

б) d=0,1; $n = \frac{3{,}6-3}{3{,}6 \cdot 0{,}1} = 1{,}667$ года.

Пример 2. Вкладчик хочет за 10 месяцев увеличить свой капитал не менее чем в 1,5 раза. Определить требуемую простую процентную ставку, по которой вкладчик должен выбрать банк, если в расчете применяются обыкновенные проценты и приближенное число дней.

Решение. $S/P = 1{,}5$; $t = 30 \cdot 10 = 300$ дней.

$$i = \frac{1{,}5-1}{300} \cdot 360 = 0{,}6;$$

т.е. процентная ставка должна быть не менее 60% годовых.

Пример 3. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. Определить доходность

ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

Решение.

$$i = \frac{110-90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}6667 \quad (66{,}67\%);$$

$$d = \frac{110-90}{110 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}5454 \quad (54{,}54\%).$$

Задачи

3.25. Малое предприятие получило кредит на 1 год в размере 20 тыс. руб. с условием возврата 32 тыс. руб. Определить простую процентную ставку кредита.

Ответ: 60%.

3.26. Определить простую годовую процентную ставку, при которой первоначальный капитал в размере 20 тыс. руб. достигнет через 90 дней 30 тыс. руб. Использовать банковское правило.

Ответ: *200%.*

3.27. Определить период времени, за который капитал в размере 20 тыс. руб. вырастет до 60 тыс. руб., если применяется простая процентная ставка 150% годовых.

Ответ: *1 год 4 мес.*

3.28. Определить период времени, необходимый для удвоения капитала по простым процентам при процентной ставке 12% годовых.

Ответ: 8 лет 4 мес.

3.29. Векселедержатель получил за вексель 60 тыс. руб. за 5 месяцев до срока погашения. Номинальная стоимость векселя – 70 тыс. руб. Определить простую учетную ставку банка.

Ответ: 34,29%.

3.30. Номинальная стоимость векселя 20 тыс. руб. При учете векселя по простой учетной ставке 90% годовых владелец векселя получил 18 тыс. руб. За сколько дней до погашения был учтен вексель? Принять количество дней в году $К = 360$.

Ответ: 40 дней.

4. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

4.1. Начисление сложных годовых процентов

По этой схеме начисление процентов производится раз в год, но проценты начисляются не на первоначальную сумму *P*, а на всю накопленную к этому моменту сумму *S*, т.е. в схеме сложных процентов производится капитализация процентов.

Наращенная на инвестированный капитал *P* сумма будет равна:

– к концу первого года

$$S_1 = P \cdot (1+i);$$

– к концу второго года

$$S_2 = S_1 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2;$$

и т.д., к концу n-го года

$$S_n = P \cdot (1+i)^n.$$

Формула

$$S = P \cdot (1+i)^n. \qquad (4.1)$$

называется формулой наращения по сложным процентам (формулой сложных процентов). Здесь i – годовая процентная ставка, n – срок ссуды в годах. Под n пока подразумеваются только целые числа.

Замечание. Формула (4.1) получена для годовой процентной ставки и срока, измеряемого в годах. Однако ее можно применять и при других периодах начисления. Тогда i означает ставку за один период начисления (месяц, квартал и т.п.), а n – число таких периодов.

Множитель $(1+i)^n$ называется множителем наращения сложных процентов или *мультиплицирующим* множителем; его значения приводятся в специальных таблицах.

Пример 1. 250 тыс. руб. инвестированы на 4 года под 6% годовых. Вычислить сложные проценты, начисленные к концу срока.

Решение. $P = 250$; $i = 0{,}06$; $n = 4$.

$$S = 250 \cdot (1 + 0{,}06)^4 = 315{,}619 \text{ тыс. руб.}$$

$$I = S - P = 315{,}619 - 250 = 65{,}619 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2. 100 тыс. руб. положены на банковский счет на 3 месяца по ставке 10% в месяц. Найти наращенную на конец срока сумму.

Решение. $P = 100$; $i = 0{,}1$; $n = 3$.

$$S = 100 \cdot (1 + 0{,}1)^3 = 100 \cdot 1{,}331 = 133{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

Переменная процентная ставка. Пусть за время кредита процентная ставка изменялась: в течение срока n_1 ставка была равна i_1, в течение следующего срока n_2 – i_2 и т.д. Тогда за весь срок кредита $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P \cdot \prod_{k=1}^{m} (1 + i_k)^{n_k}.$$

4.2. Начисление процентов при дробном числе лет

Часто срок ссуды равен нецелому числу лет. Иногда в таком случае проценты начисляются только за целое число лет (или других периодов начисления), дробная часть периода отбрасывается. Чаще, однако, учитывается полный срок. При этом применяются два метода. Согласно первому методу, который назовем *общим*, расчет выполняется по формуле (4.1) с нецелым *n*. По второму методу, *смешанному*, начисление процентов за целое число лет (периодов) выполняется по формуле сложных процентов, а за оставшуюся дробную часть срока – по формуле простых процентов:

$$S = P \cdot (1 + i)^a \cdot (1 + b \cdot i), \tag{4.2}$$

где $n = a + b$ – срок ссуды, a – целое число лет (периодов), b – дробная часть срока в годах (периодах).

Пример. Кредит в размере 3 млн. руб. выдан на 3 года и 160 дней под 16% годовых. Определить сумму долга на конец срока общим и смешанным методами ($K = 360$).

Решение. $P = 3000$; $i = 0{,}16$; $n = 3\frac{160}{360} = 3{,}444444$.

Общий метод:

$$S = 3000 \cdot (1 + 0{,}16)^{3{,}444444} = 5001{,}995 \text{ тыс. руб.}$$

Смешанный метод:

$$S = 3000 \cdot (1 + 0{,}16)^3 (1 + 0{,}444444 \cdot 0{,}16) = 5015{,}679 \text{ тыс. руб.}$$

4.3. Начисление процентов несколько раз в году. Номинальная процентная ставка

В современной банковской практике проценты начисляются и присоединяются к основному капиталу (капитализируются), как правило, не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, месяцам. При этом в контрактах обычно указывается не ставка за период начисления, а годовая ставка j и период начисления. Ставка j в этом случае называется *номинальной*.

Пусть m – число периодов начисления процентов в году, тогда каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Формула наращения по сложным процентам принимает вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^N, \tag{4.3}$$

где $N = m \cdot n$ – общее число периодов начисления, n – срок ссуды в годах.

Пример. Найти наращенную сумму и сложные проценты, если 100 тыс. руб. инвестированы на два года по номинальной ставке 12% годовых при начислении процентов: а) по полугодиям, б) по месяцам.

Решение. $P = 100$; $n = 2$; $j = 0{,}12$.

а) $m = 2$; $N = 2 \cdot 2 = 4$;

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^4 = 126{,}247 \text{ тыс. руб.}$$

$$I = 126{,}247 - 100 = 26{,}247 \text{ тыс.руб.}$$

б) $m = 12$; $N = 12 \cdot 2 = 24$;

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{24} = 126{,}973 \text{ тыс. руб.}$$

$$I = 126{,}973 - 100 = 26{,}973 \text{ тыс. руб.}$$

При заданной номинальной ставке чем чаще производятся начисления, тем больше сумма процента.

Задачи

4.1. Определить наращенную сумму вклада в 3 тыс. руб. при сроке вклада 2 года по номинальной процентной ставке 40% годовых. Начисление процентов производится: а) раз в год; б) по полугодиям; в) поквартально; г) ежемесячно.

Ответ: а) 5,88 тыс. руб.; б) 6,221 тыс. руб.; в) 6,431 тыс. руб.; г) 6,590 тыс. руб.

4.2. Банк принимает вклады от населения по номинальной процентной ставке 12% годовых. Начисление процентов ежемесячное. Вклад 12 тыс. руб. был востребован через 102 дня. Определить доход клиента: а) по общему методу; б) по смешанному методу. Использовать методику 360/360.

Ответ: а) 412,92 руб.; б) 413,07 руб.

4.3. Фирма получила кредит в 9 млн. руб. сроком на три года. Проценты начисляются сложные. Процентная ставка за

первый год – 40%, а каждый последующий год увеличивается на 5%. Определить сумму возврата кредита.

Ответ: 27,405 млн. руб.

4.4. Эффективная процентная ставка

Финансовыми контрактами могут предусматриваться различные схемы начисления процентов. Как правило, указывается годовая номинальная процентная ставка. Однако эта ставка не отражает реальной эффективности финансовой сделки и поэтому не может использоваться для сопоставления сделок. Универсальным показателем, позволяющим сравнивать сделки с разными условиями, является эффективная годовая процентная ставка.

Эффективной ставкой конкретной финансовой сделки называется такая годовая процентная ставка i_e, которая при однократном начислении процентов в году дает такой же результат, как и рассматриваемая сделка.

Связь между номинальной и эффективной процентными ставками получим, приравнивая соответствующие множители наращения:

$$(1 + i_e)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Отсюда находим выражение эффективной ставки через номинальную:

$$i_e = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

и номинальной через эффективную:

$$j = m \cdot \left[(1 + i_e)^{\frac{1}{m}} - 1\right].$$

Пример 1. Предприниматель может получить ссуду в банке на условиях: а) 26% годовых при ежемесячном начислении процентов; б) 27% годовых при полугодовом начислении. Какой вариант следует выбрать?

Решение. Относительные расходы предпринимателя на получение ссуды можно оценить эффективной процентной ставкой – чем она выше, тем больше расходы.

а) $j = 0,26$; $m = 12$;

$$i_e = \left(1 + \frac{0,26}{12}\right)^{12} - 1 = 0,2933;$$

б) $j = 0,27$; $m = 2$;

$$i_e = \left(1 + \frac{0,26}{2}\right)^{2} - 1 = 0,2882.$$

Таким образом, следует выбрать вариант (б).

<u>Пример 2</u>. Какой должна быть номинальная ставка, чтобы при ежемесячном начислении процентов обеспечить эффективную ставку 18%?

Решение. $i_e = 0,18$; $m = 12$.

$$j = 12 \cdot \left[(1 + 0,18)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 0,1667, \quad j = 16,67\%.$$

Процентные ставки за разные периоды называются эквивалентными, если соответствующие им годовые эффективные ставки совпадают, т.е. выполняется равенство:

$$(1 + i_1)^{m_1} = (1 + i_2)^{m_2}.$$

Для номинальных процентных ставок условие эквивалентности имеет вид:

$$\left(1 + \frac{j_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2}.$$

<u>Пример 3</u>. Для номинальной ставки 12% с начислением процентов два раза в год найти эквивалентную ставку, проценты по которой начисляются ежемесячно.

Решение. $j_1 = 0,12$; $m_1 = 2$; $m_2 = 12$.

$$\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2} = \left(1 + \frac{j_2}{12}\right)^{12} \Rightarrow j_2 = 12 \cdot \left[(1 + 0,06)^{\frac{1}{6}} - 1\right] = 0,1171.$$

Задачи

4.4. Три коммерческих банка предлагают следующие условия: 1 банк начисляет простые проценты из расчета 35% годовых; 2 банк – сложные проценты по номинальной ставке 30% при ежемесячном начислении процентов; 3 банк – сложные проценты по номинальной ставке 32% с поквартальным начислением процентов. В какой банк выгоднее поместить деньги?

Ответ: $i_{e1} = 35\%$; $i_{e2} = 34,49\%$; $i_{e3} = 36,05\%$;

4.5. Предприятие получило кредит на 3 года под годовую процентную ставку 48%. Комиссионные составляют 5% от суммы кредита. Определить эффективную процентную ставку кредита, если: а) кредит получен под простые проценты; б) кредит получен под сложные проценты с начислением процентов один раз в год; в) сложные проценты с ежемесячным начислением.

Ответ: а) 36,95%; б) 50,55%; в) 62,86%.

4.6. Определить эффективную ставку для депозита сроком 4 месяца, если номинальная процентная ставка банка 48%, начисление процентов ежемесячное, а проценты облагаются 15%-м налогом.

Ответ: 49,87%.

4.5. Дисконтирование по сложным ставкам

Математическое дисконтирование заключается в определении P по S при заданной сложной процентной ставке наращения:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot v^n,$$

где $v^n = (1+i)^n$ – дисконтный множитель.

При начислении процентов m раз в году

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = S \cdot v^{mn};$$

$$v^{mn} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}.$$

Пример 1. Какой необходимо вложить капитал, чтобы получить 4 тыс. руб. через 5 лет наращением по сложным процентам по ставке 12% годовых, если наращение осуществляется: а) ежегодно; б) ежеквартально?

Решение. $S = 4$; $n = 5$; $j = 0{,}12$.

а) $m = 1$, $P = \dfrac{4}{(1+0{,}12)^5} = 2{,}270$ тыс. руб.

б) $m = 4$, $P = \dfrac{4}{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\times 5}} = 2{,}215$ тыс. руб.

В отличие от математического дисконтирования, выполняемого по сложной процентной ставке, банковский учет выполняется по сложной учетной ставке:

$$P = S \cdot (1-d)^n, \tag{4.4}$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

Если дисконтирование выполняется m раз в году, то

$$P = S \cdot \left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{4.5}$$

где f – номинальная годовая учетная ставка.

Как и в случае процентной ставки, вводится эффективная учетная ставка d_e. Это такая учетная ставка, которая при дисконтировании один раз в году приводит к тому же результату, что и данная номинальная учетная ставка.

Из условия равенства дисконтных множителей:

$$(1-d_e)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}$$

находим

$$d_e = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^m,$$

$$f = m \cdot \left[1-(1-d_e)^{\frac{1}{m}}\right].$$

Пример 2. Долговое обязательство продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых с поквартальным учетом. Найти эффективную учетную ставку.

Решение. $m = 4$; $f = 0{,}15$.

$$d_e = 1-\left(1-\frac{0{,}15}{4}\right)^4 = 0{,}14177, \quad d_e = 14{,}18\%.$$

Заметим, что сложная учетная ставка может использоваться и для расчета наращенных сумм:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}; \qquad S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}.$$

Задачи

4.7. Банк начисляет проценты на вклады ежеквартально по сложной процентной ставке 40% годовых. Определить сумму вклада, позволяющую накопить через 1,5 года сумму 500 тыс. руб.

Ответ: 282,237 тыс. руб.

4.8. Банк начисляет проценты на вклады ежемесячно по номинальной ставке 40% годовых с использованием французской практики. Определить сумму вклада для накопления с 10 мая по 25 ноября 300 тыс. руб.

Ответ: 241,357 тыс. руб.

4.9. Вексель номинальной стоимостью 100 тыс. руб. учтен в банке за 3 месяца до погашения по сложной годовой учетной ставке 60% при ежемесячном дисконтировании. Определить текущую стоимость векселя и дисконт.

Ответ: 85,737 тыс. руб.

4.10. Вексель учтен в банке за 3 месяца до срока погашения по цене 16,612 тыс.руб. Номинальная учетная ставка банка – 72%, дисконтирование ежемесячное. Определить номинальную стоимость векселя.

Ответ: 20 тыс. руб.

4.6. Определение срока ссуды и размера ставки

Преобразуя соотношения (4.1), (4.3), (4.4) и (4.5), получаем формулы, позволяющие вычислять параметры финансовых сделок по схеме сложных процентов:

– срок ссуды:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}; \quad n = \frac{\ln(S/P)}{m \cdot \ln(1+j/m)};$$

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)}; \quad n = \frac{\ln(P/S)}{m \cdot \ln(1-f/m)};$$

– процентную ставку за период начисления:

$$i = (S/P)^{\frac{1}{n}} - 1;$$

– номинальную процентную ставку:

$$j = m \cdot \left[(S/P)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right];$$

– учетную ставку за период дисконтирования:

$$d = 1 - (P/S)^{\frac{1}{n}};$$

– номинальную учетную ставку:

$$f = m \cdot \left[1 - (P/S)^{\frac{1}{mn}} \right].$$

<u>Пример 1</u>. За сколько лет сумма депозита удвоится, если проценты начисляются по сложной ставке 15% годовых?

Решение. $S/P = 2$; $i = 0{,}15$.

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}15)} = 4{,}959 \text{ года.}$$

<u>Пример 2</u>. За долговое обязательство в 300 тыс. руб. банком было выплачено 200 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 8%?

Решение. $P/S = 200/300 = 2/3$; $d = 0{,}08$.

$$n = \frac{\ln(200/300)}{\ln(1-0{,}08)} = 4{,}863 \text{ года.}$$

<u>Пример 3</u>. Вексель был учтен за полтора года до срока, при этом владелец векселя получил 0,8 от указанной в векселе суммы. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен вексель?

Решение. $P = 0{,}8 \cdot S$; $n = 1{,}5$.

$$d = 1 - 0{,}8^{\frac{1}{1{,}5}} = 0{,}1382, \quad \text{т.е. } d = 13{,}82\%.$$

Задачи

4.11. Номинальная процентная ставка банка – 72% годовых; начисление процентов ежемесячное. На какой срок нужно поместить вклад в сумме 30 тыс. руб., чтобы получить 40 тыс. руб.?

Ответ: 0,411 года ≈ 5 мес.

4.12. Сумма в 4,5 млн. руб. помещена на банковский депозит. Какой должна быть номинальная процентная ставка при ежемесячном начислении процентов, чтобы через три месяца наращенная сумма была равна 5 млн. руб.?

Ответ: 42,89%.

4.7. Непрерывное наращение и дисконтирование

Уменьшая промежуток времени между начислениями сложных процентов, т.е. увеличивая частоту начислений, приходим в пределе к так называемым непрерывным процентам, для которых наращенная сумма определяется так:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} = P\cdot e^{in}.$$

Непрерывную процентную ставку называют силой роста и обозначают δ:

$$S = P\cdot e^{\delta\cdot n}. \qquad (4.6)$$

$e^{\delta n}$ – множитель наращения. Отсюда

$$P = S\cdot e^{-\delta\cdot n}.$$

Непрерывное наращение крайне редко используется на практике, в то же время оно очень удобно при анализе сложных финансовых проблем.

Если наращение сложными процентами осуществляется по номинальной учетной ставке *f,* то при $m\to\infty$

$$S = \lim_{m\to\infty}\frac{P}{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}} = P\cdot e^{d\cdot n}. \qquad (4.7)$$

При $d = i = \delta$ формулы (4.6) и (4.7) приводят к одинаковым результатам. Таким образом, в непрерывной модели эквивалентные процентная ставка (сила роста) и ставка учета равны между собой.

Из формулы (4.6) получаем выражения для параметров кредитной сделки:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}; \quad \delta = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{n}.$$

<u>Пример</u>. Какую сумму необходимо поместить на банковский депозит, чтобы через три года получить 5 тыс. руб., если происходит непрерывное начисление процентов по ставке $\delta = 10\%$?

Решение. $P = 5\cdot e^{-0,1\times 3} = 3,704$ тыс. руб.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

5.1. Средние процентные и учетные ставки

При сопоставлении финансовых операций с изменяющимися процентными ставками полезным оказывается вычисление средних значений ставок для этих операций. Средняя процентная ставка – это такая ставка, при замене на которую всех усредняемых значений ставок результат наращения или дисконтирования не изменяется.

Средняя для простых процентных ставок находится из условия равенства множителей наращения, рассчитанных по усредненной и фактическим ставкам:

$$1 + N \cdot \bar{i} = 1 + \sum_k n_k \cdot i_k,$$

где $N = \sum_k n_k$. Отсюда

$$\bar{i} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N}.$$

Аналогичным образом, приравнивая дисконтные множители, получаем для средней учетной ставки простых процентов:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_k \cdot d_k}{N}.$$

Для сложных процентов:

$$\left(1 + \bar{i}\right)^N = \left(1 + i_1\right)^{n_1} \cdot \left(1 + i_2\right)^{n_2} \cdot \ldots ;$$

отсюда

$$\bar{i} = \sqrt[N]{\left(1 + i_1\right)^{n_1} \cdot \left(1 + i_2\right)^{n_2} \cdot \ldots} - 1.$$

Рассмотрим теперь усреднение ставок в нескольких однородных операциях, различающихся суммами ссуд и процентными ставками. Средние ставки находим из условия равенства наращенных сумм:

– простые проценты:

$$\sum_k P_k \cdot \left(1 + n \cdot \bar{i}\right) = \sum_k P_k \cdot \left(1 + n \cdot i_k\right);$$

$$\bar{i} = \frac{\sum P_k \cdot i_k}{\sum P_k}; \qquad (5.1)$$

– сложные проценты:

$$\sum_k P_k \cdot \left(1 + \bar{i}\right)^n = \sum_k P_k \cdot \left(1 + i_k\right)^n;$$

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_k \cdot \left(1 + i_k\right)^n}{\sum P_k}} - 1. \qquad (5.2)$$

Заметим, что формулы (5.1), (5.2) получены для частного случая, когда сроки ссуд одинаковые.

Пример 1. Банк выдал кредит на 3 года. Первые 2 года процентная ставка составляла 10% годовых, 3-й год – 20%. Найти среднюю процентную ставку операции для случаев: а) начисления по простым процентам; б) начисления по сложным процентам.

Решение. $i_1 = 0{,}1$; $n_1 = 2$; $i_2 = 0{,}2$; $n_2 = 1$; $N = 3$.

а) $\bar{i} = \dfrac{2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2}{3} = 0{,}13333;$

б) $\bar{i} = \sqrt[3]{\left(1 + 0{,}1\right)^2 \left(1 + 0{,}2\right)} - 1 = 0{,}13237.$

Пример 2. Клиент разместил сумму 8 тыс. руб. на двухлетний депозит в двух банках. В первый банк он поместил 5 тыс. руб. под 12% годовых, во второй – 3 тыс. руб. под 20% годовых, в обоих банках проценты сложные. Найти среднюю процентную ставку этих двух операций.

Решение. $P_1 = 5$; $P_2 = 3$; $i_1 = 0{,}12$; $i_2 = 0{,}2$; $n = 2$.

$$\bar{i} = \sqrt{\frac{5\cdot(1+0{,}12)^2 + 3\cdot(1+0{,}2)^2}{5+3}} - 1 = 0{,}15065; \quad (\approx 15\%).$$

5.2. Эквивалентность ставок

Для процедур наращения и дисконтирования могут применяться различные виды процентных ставок. Те значения разного вида ставок, которые в конкретных условиях приводят к одинаковым результатам, называют эквивалентными значениями (в данных условиях).

Соотношения эквивалентности можно найти для любой пары различного вида ставок. Эти соотношения получают из условия равенства соответствующих множителей наращения. Ранее были уже получены соотношения между эквивалентными ставками наращения и учета по простым процентам. Установим аналогичные соотношения для сложных процентной и учетной ставок при наращении и дисконтировании один раз в год:

$$(1+i)^n = \frac{1}{(1-d)^n};$$

отсюда

$$i = \frac{d}{1-d}; \quad d = \frac{i}{1+i}.$$

Заметим, что эти соотношения не зависят от срока кредитной операции, в отличие от простых процентов.

Найдем еще соотношение эквивалентности между силой роста (ставкой наращения по непрерывным процентам) и годовой процентной ставкой:

$$e^{\delta\cdot n} = (1+i)^n;$$

отсюда

$$\delta = \ln(1+i); \quad i = e^{\delta} - 1.$$

Нет необходимости выводить и запоминать весь набор возможных соотношений между эквивалентными ставками. Проще каждый раз записывать соответствующее уравнение эквивалентности и из него получать требуемые соотношения.

<u>Пример</u>. Какая непрерывная процентная ставка заменяет поквартальное начисление процентов по номинальной процентной ставке 20% годовых?

Решение. $j = 0{,}2$; $m = 4$.

Уравнение эквивалентности:

$$e^{\delta\cdot n} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n};$$

отсюда

$$\delta = m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right).$$

Вычисляя по этой формуле, находим:

$$\delta = 4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right) = 0{,}19516; \quad (\approx 19{,}5\%).$$

Задачи

5.1. Определить сложную учетную ставку, эквивалентную сложной процентной ставке 60% годовых. Начисление дисконта и процентов один раз в год.

Ответ: 37,5%.

5.2. Определить номинальную процентную ставку при ежемесячном начислении процентов, эквивалентную сложной учетной ставке 60% при дисконтировании один раз в год.

Ответ: 95,22%.

5.3. Определить номинальную учетную ставку, эквивалентную номинальной процентной ставке 48% при ежемесячном начислении дисконта и процентов.

Ответ: 46,15%.

5.3. Финансовая эквивалентность обязательств

На практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно долговое обязательство другим, например, с более отдаленным сроком платежа, или объединить несколько платежей в один и т.п. Такие изменения должны осуществляться при соблюдении финансовой эквивалентности обязательств. Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными к одному моменту времени, оказываются равными. Приведение осуществляется путем дисконтирования (приведение к более ранней дате) или, наоборот, наращением суммы платежа (если эта дата более поздняя). Таким образом, две денежные суммы, S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) значения, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковые.

Принцип эквивалентности лежит в основе формул наращения и дисконтирования. Сумма кредита P эквивалентна возвращаемой сумме S при заданной процентной ставке и методе ее начисления.

Пример. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 40 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго: выплатить 45 тыс. руб. через 8 месяцев. Можно ли считать обязательства равноценными?

Решение. $S_1 = 40$; $n_1 = 4$; $S_2 = 45$; $n_2 = 8$.

Так как платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, равную, допустим, 20%. Получаем

$$P_1 = \frac{40}{1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}2} = 37{,}50 \text{ тыс. руб.}$$

$$P_2 = \frac{45}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}2} = 39{,}71 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, сравниваемые обязательства не являются равноценными при заданной ставке и поэтому не могут эквивалентно заменить друг друга.

Итак, сравнение платежей предполагает использование конкретного значения процентной ставки и, следовательно, результат сравнения зависит от выбора этого значения.

Задача

5.4. Долг в размере 300 тыс. руб. должен быть выплачен через два года. Найти эквивалентное по сложной процентной ставке 25% годовых значение: а) через год; б) через 5 лет.

Ответ: а) 240 тыс. руб.; б) 585,937 тыс. руб.

5.4. Консолидация платежей

Консолидация, т.е. объединение, платежей является одним из самых распространенных видов изменения условий контрактов. Пусть платежи $S_1, S_2, \ldots, S_m$ со сроками $n_1, n_2, \ldots, n_m$ заменяются одним платежом в сумме S_0 со сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задан срок n_0, то находится сумма S_0, и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа, то определяется срок.

Определение размера консолидированного платежа. При решении этой задачи величину S_0 находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей. Если применяются простые процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j \left(1 + \Delta n_j \cdot i\right) + \sum_k S_k \left(1 + \Delta n_k \cdot i\right)^{-1},$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$, S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$,

$$\Delta n_j = n_0 - n_j, \quad \Delta n_k = n_k - n_0.$$

Если применяются сложные процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i)^{\Delta n_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-\Delta n_k}.$$

Пример 1. Два платежа в 1 и 0,5 млн. руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применение при консолидации простой ставки 20% годовых. Найти консолидированную сумму долга. Число дней в году $K = 365$.

Решение. $S_1 = 1000$; $S_2 = 500$; $t_1 = 150$; $t_2 = 180$; $t_0 = 200$.

$$S_0 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}2\right) + 500 \cdot \left(1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}2\right) =$$

$= 1532{,}87$ тыс. руб.

Пример 2. Платежи в 1 и 2 млн. руб. и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20% годовых. Найти сумму консолидированного платежа.

Решение. $S_1 = 1000$; $S_2 = 2000$; $n_1 = 2$; $n_2 = 3$; $n_0 = 2{,}5$.

$$S_0 = 1000 \cdot (1+0{,}2)^{0{,}5} + 2000 \cdot (1+0{,}2))^{-0{,}5} = 2921{,}187 \text{ тыс. руб.}$$

Определение срока консолидированного платежа. Уравнение эквивалентности в этом случае запишем в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей. Если применяется простая ставка, то

$$S_0 \cdot (1 + n_0 i)^{-1} = \sum S_j \cdot (1 + n_j i)^{-1},$$

откуда

$$n_0 = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{S_0}{\sum S_j (1 + n_j i)^{-1}} - 1 \right). \tag{5.3}$$

Очевидно, что решение может быть получено только при условии

$$S_0 > \sum S_j (1 + n_j i)^{-1},$$

т.е. размер заменяющего платежа не может быть меньше суммы современных стоимостей заменяемых платежей. Заметим также, что искомый срок пропорционален величине консолидированного платежа.

При использовании сложной процентной ставки уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_0 (1+i)^{-n_0} = \sum_j S_j (1+i)^{-n_j}.$$

Для упрощения дальнейшей записи примем

$$Q = \sum S_j (1+i)^{-n_j},$$

после чего находим

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{5.4}$$

Решение существует, если $S_0 > Q$.

Для частного случая, когда $S_0 = \sum S_j$, при определении срока консолидированного платежа иногда используют вместо формулы (5.4) средний взвешенный срок

$$n_0 = \frac{\sum S_j n_j}{S_0}. \tag{5.5}$$

Эта формула не требует задания уровня процентной ставки. Однако она дает приближенный результат, который больше точного. Погрешность тем больше, чем выше процентная ставка i.

Пример 1. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн. руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в размере

50 млн. руб. Найти срок выплаты консолидированного платежа, если $i = 0,1$, $K = 365$.

Решение. Современная стоимость заменяемых платежей равна

$$P = 10\left(1+\frac{50}{365}0{,}1\right)^{-1} + 20\left(1+\frac{80}{365}0{,}1\right)^{-1} + 15\left(1+\frac{150}{365}0{,}1\right)^{-1} =$$

$= 43{,}844$ млн. руб.

Согласно (5.3) находим

$$n_0 = \frac{1}{0{,}1}\cdot\left(\frac{50}{43{,}844}-1\right) = 1{,}404 \text{ года.}$$

Пример 2. Платежи в 1 и 2 млн. руб. со сроками оплаты через 2 и 3 года объединяются в один размером 3 млн. руб. При консолидации используется сложная ставка 20%. Найти срок консолидированного платежа.

Решение. Вычисляем величину

$$Q = 1\cdot 1{,}2^{-2} + 2\cdot 1{,}2^{-3} = 1{,}8519 \text{ млн. руб.}$$

Затем находим по формуле (5.4)

$$n_0 = \frac{\ln(3/1{,}8518)}{\ln(1{,}2)} = 2{,}646 \text{ года.}$$

Расчет по приближенной формуле (5.5) дает

$$n_0 = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3}{3} = 2{,}667 \text{ года.}$$

Задачи

5.5. Для потока платежей, состоящего из трех последовательных выплат в размере 25 тыс. руб. каждая через 1 год, 3 года и 5 лет найти эквивалентное по сложной процентной ставке 10% годовых значение: а) сегодня; б) через два года; в) через пять лет.

Ответ: а) 57,033 тыс. руб.; б) 69,01 тыс. руб.; в) 91,852 тыс. руб.

5.6. Три векселя номинальной стоимостью 20, 30 и 60 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 80, 90 и 140 дней объединяются в один со сроком погашения 120 дней. Объединение производится по простой процентной ставке 80% годовых. Какова номинальная стоимость объединенного векселя, если расчет выполняется по банковскому правилу?

Ответ: 111,225 тыс. руб.

5.7. Долг должен быть погашен двумя платежами: 120 тыс. руб. через год и 450 тыс. руб. через 3 года. При ставке сложных процентов 25% годовых найти срок, когда замена обеих выплат одной выплатой в размере 480 тыс. руб. будет эквивалентной.

Ответ: 1 год 9 мес.

5.8. Три векселя номинальной стоимостью 30, 50 и 80 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 210, 240 и 270 дней объединяются в один номинальной стоимостью 180 тыс. руб. Объединение происходит по простой процентной ставке 60% годовых. Найти срок погашения объединенного векселя, используя банковское правило.

Ответ: 355 дней, если платежи приводятся на текущую дату; 323 дня, если платежи приводятся на дату, соответствующую сроку 270 дней.

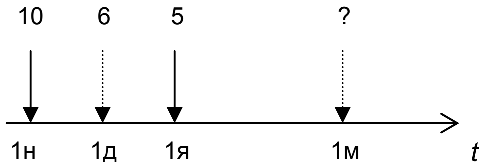
5.5. Общая задача изменения условий контракта

В общем случае решение задачи об изменении условий выплат также основывается на принципе эквивалентности платежей до и после изменения условий. Конкретный вид уравнения эквивалентности определяется содержанием контрактов и выбором базовой даты, на которую производится приведение денежных сумм.

Пример. Две суммы, 10 и 5 млн. руб., должны быть выплачены 1 ноября текущего года и 1 января следующего года.

Стороны согласились пересмотреть порядок выплат: должник 1 декабря выплачивает 6 млн. руб., а остаток долга гасится 1 марта. Необходимо найти сумму остатка при условии, что пересчет осуществляется по ставке простых процентов, равной 20% ($K = 365$).

Решение. Временная диаграмма выплат:



Возьмем за базовую дату, допустим, момент выплаты 5 млн. руб. Уравнение эквивалентности в этом случае выглядит следующим образом:

$$10 \cdot \left(1 + \frac{61}{365} \cdot 0{,}2\right) + 5 = 6 \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0{,}2\right) + S \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0{,}2\right)^{-1}.$$

Отсюда находим $S = 9{,}531$ млн. руб.

Заметим, что изменение базовой даты приводит к некоторому изменению результата. Например, выбрав базовой датой 1 марта, т.е. приводя все платежи к этой дате, получаем такое уравнение эквивалентности:

$$10 \cdot \left(1 + \frac{120}{365} \cdot 0{,}2\right) + 5 \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0{,}2\right) = 6 \cdot \left(1 + \frac{90}{365} \cdot 0{,}2\right) + S.$$

Отсюда теперь $S = 9{,}523$ млн. руб.

Задачи

5.9. Заменить следующий поток платежей: 200 тыс. руб. через год, 175 тыс. руб. через 2 года, 210 тыс. руб. через 4 года эквивалентным потоком платежей, состоящим из двух одинаковых выплат: первая – через 1,5 года, вторая – через 3 года.

Процентная ставка – 8% годовых при полугодовом начислении.

Ответ: 290,564 тыс. руб.

5.10. Имеется обязательство уплатить 10 тыс. руб. через 4 месяца и 7 тыс. руб. через 8 месяцев. По новому обязательству выплата производится равными суммами через 3 и 9 месяцев. Изменение условий осуществляется с использованием простой процентной ставки, равной 10% годовых. Найти сумму выплат. Получить два варианта решения: а) приводя платежи на текущий момент; б) приводя платежи на конец девятого месяца.

Ответ: а) 8,521 тыс. руб.; б) 8,524 тыс. руб.

5.11. Существует обязательство уплатить 100 тыс. руб. через 5 лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через 2 года выплачивается 30 тыс. руб., а оставшийся долг – спустя 4 года после первой выплаты. Определить сумму последнего платежа. Процентная ставка – сложные 10% годовых. Зависит ли результат от даты, на которую приводятся платежи?

Ответ: 66,077 тыс. руб.; не зависит.

5.6. Инфляция

Инфляция – это обесценивание денег, вызванное чрезмерным увеличением выпущенной в обращение массы бумажных денег по сравнению с реальным предложением платных товаров и услуг.

Проявляется инфляция в росте цен. Изменение цен на товары и услуги определяется при помощи индекса цен. *Индекс цен* – это число, равное отношению цен на товары в один период времени к ценам этих же товаров в другой период времени, принимаемый за базисный.

Индекс потребительских цен определяется по стоимости так называемой «потребительской корзины», т.е. определенного набора товаров. В России индекс потребительских цен рассчитывается относительно уровня цен в сентябре 1977 г.

Основными показателями, характеризующими инфляцию за период времени от t_0 до t_j, являются:

– *индекс инфляции,* $J = \dfrac{S_j}{S_0}$, где S_j, S_0 – стоимости потребительской корзины в моменты времени t_0 и t_j;

– *темп инфляции* $\alpha = \dfrac{S_j - S_0}{S_0}$.

Индекс инфляции показывает, во сколько раз возросли цены, а темп инфляции – относительное увеличение цен. Темп инфляции, выраженный в процентах, называют *уровнем инфляции*; он показывает, на сколько процентов возросли цены.

Нетрудно видеть, что

$$\alpha = J - 1; \qquad J = 1 + \alpha.$$

Если известны индексы инфляции J_k или темпы инфляции α_k для нескольких последовательных периодов t_k (k = 1, 2, …, N), то индекс и темп инфляции за весь суммарный период находятся так:

$$J = \prod_k J_k; \qquad \alpha = \prod_k (1 + \alpha_k) - 1.$$

При равенстве индексов или темпов инфляции на каждом из временных интервалов имеем:

$$J = J_1^N = (1 + \alpha_1)^N; \qquad \alpha = (1 + \alpha_1)^N - 1;$$

где J_1 и α_1 – индекс и темп инфляции за один период.

Пример 1. Найти годовой уровень инфляции при ежемесячном уровне инфляции 5%.

Решение. $\alpha_1 = 0{,}05$; $N = 12$.

$$\alpha = (1 + 0{,}05)^{12} - 1 = 0{,}796 \quad (\alpha = 79{,}6\%).$$

Пример 2. Уровни инфляции по месяцам составили 1,5; 1,2 и 0,5%. Найти индекс инфляции за квартал.

Решение. $J = (1 + 0{,}015)(1 + 0{,}012)(1 + 0{,}005) = 1{,}0323$.

Задачи

5.12. Найти годовой уровень инфляции при ежемесячном уровне инфляции 0,5%.

Ответ: 6,17%.

5.13. Уровни инфляции по месяцам составили 1,8%, 1,3% и 0,9%. Найти индекс инфляции за квартал.

Ответ: 1,041.

5.14. Найти средний месячный уровень инфляции, если годовой уровень инфляции составил 12%.

Ответ: 0,95%.

5.7. Начисление процентов с учетом инфляции

Если за время срока кредитной сделки имела место инфляция, то реальная величина наращенной суммы S' будет меньше вычисленной по формуле простых или сложных процентов: $S' = S / J$. Чтобы обеспечить ту же доходность операции, что ожидалась без учета инфляции, наращенная сумма должна быть равна $S_\alpha = S \cdot J$. При наращении по простым процентам

$$S_\alpha = P \cdot (1 + n \cdot i) \cdot J.$$

В случае наращения по сложным процентам

$$S_\alpha = P \cdot (1 + i)^n \cdot J.$$

Представляет интерес найти такую процентную ставку i_α, которая в условиях инфляции обеспечивает реальную доходность операции по ставке i.

Уравнение эквивалентности при наращении по простым процентам:

$$1+n\cdot i_\alpha=(1+n\cdot i)\cdot J,$$

отсюда

$$i_\alpha=\frac{(1+n\cdot i)\cdot J-1}{n}=\frac{(1+n\cdot i)\cdot(1+\alpha)-1}{n};$$

$$i=\frac{n\cdot i_\alpha+1-J}{n\cdot J}=\frac{n\cdot i_\alpha-\alpha}{n\cdot(1+\alpha)}.$$

Уравнение эквивалентности при наращении по сложным процентам один раз в год:

$$(1+i_\alpha)^n=(1+i)^n\cdot J,$$

отсюда

$$i_\alpha=(1+i)\cdot J^{1/n}-1=(1+i)\cdot(1+\alpha)^{1/n}-1;$$

$$i=\frac{1+i_\alpha}{J^{1/n}}-1=\frac{1+i_\alpha}{(1+\alpha)^{1/n}}-1.$$

Уравнение эквивалентности при начислении сложных процентов m раз в году:

$$\left(1+\frac{j_\alpha}{m}\right)^{mn}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}J,$$

отсюда

$$j_\alpha=m\cdot\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)\cdot J^{\frac{1}{mn}}-1\right];$$

$$j=m\cdot\left(\frac{1+\frac{j_\alpha}{m}}{J^{\frac{1}{mn}}}-1\right).$$

<u>Пример 1</u>. Банк выдал клиенту кредит на один год в размере 2 тыс. руб. по простой процентной ставке 6% годовых. Уровень инфляции за год составил 40%. Определить с учетом инфляции реальную погашаемую сумму и доход банка. Какой

должна быть процентная ставка, чтобы обеспечить банку реальную доходность 6% годовых?

Решение. P = 2000; I = 0,06; α = 0,4; n = 1.

Погашаемая сумма без учета инфляции:

$$S=P\cdot(1+n\cdot i)=2000\cdot(1+0{,}06)=2120 \text{ руб.}$$

Сумма процентов:

$$P=S-P=2120-2000=120 \text{ руб.}$$

Реальная погашаемая сумма в ценах на момент выдачи кредита:

$$S'=\frac{S}{J}=\frac{S}{1+\alpha}=\frac{2120}{1+0{,}4}=1514{,}29 \text{ руб.}$$

Реальный доход банка:

$$Д=S'-P=1514{,}29-2000=-458{,}29 \text{ руб.}$$

Отрицательное значение $Д$ свидетельствует об убыточности этой операции для банка.

Чтобы обеспечить реальную доходность в размере 6%, ставка процентов по кредиту с учетом инфляции должна быть равна:

$$i_\alpha=\frac{(1+ni)(1+\alpha)-1}{n}=(1+0{,}06)(1+0{,}4)-1=0{,}484;$$

т.е. i_α = 48,4%.

<u>Пример 2</u>. Найти реальное значение номинальной процентной ставки, если вклад помещен в банк на два года по сложной процентной ставке 10% годовых с ежеквартальным начислением процентов, а уровень инфляции составил в первом году 5%, а во втором – 8%.

Решение. m = 4; n = 2; j = 0,1; α_1 = 0,05; α_2 = 0,08.

Находим индекс инфляции за два года:

$$J=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=(1+0{,}05)(1+0{,}08)=1{,}134.$$

Реальное значение процентной ставки:

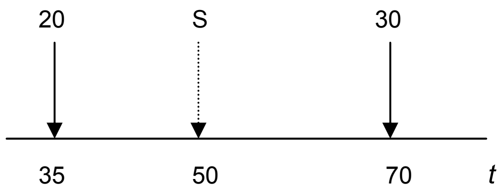
$$j = m \cdot \left(\frac{1 + \frac{j_\alpha}{m}}{J^{\frac{1}{mn}}} - 1 \right) = 4 \cdot \left(\frac{1 + \frac{0{,}1}{4}}{1{,}134^{\frac{1}{4\times 2}}} - 1 \right) = 0{,}036,$$

т.е. $j = 3{,}6\%$.

Рассмотрим на конкретном примере учет инфляции при консолидации платежей.

Пример 3. Два векселя номинальными стоимостями $S_1 = 20$ тыс. руб. и $S_2 = 30$ тыс. руб. со сроками погашения соответственно $t_1 = 35$ дней и $t_2 = 70$ дней объединяются в один со сроком погашения $t = 50$ дней по простой процентной ставке 40% годовых. Найти номинальную стоимость S объединенного векселя. Годовой уровень инфляции – 24%. (К = 365).

Решение. Построим временную диаграмму выплат по векселям.



Приводим платежи на дату, соответствующую сроку t дней (дату платежа по объединенному векселю). С учетом инфляции

$$S_1' = S_1 \cdot J_1 \cdot \left(1 + \frac{t - t_1}{K} \cdot i\right);$$

$$S_2' = \frac{1}{J_2} \cdot \left(1 + \frac{t_2 - t}{K} \cdot i\right)^{-1},$$

где J_1 – индекс инфляции за срок $(t - t_1)$ дней, J_2 – $(t_2 - t)$ дней. Для заданных числовых значений получаем

$$J_1 = (1 + 0{,}24)^{\frac{15}{365}} = 1{,}009; \quad J_2 = (1 + 0{,}24)^{\frac{20}{365}} = 1{,}012;$$

$$S_1' = 20 \cdot 1{,}009 \cdot \left(1 + \frac{15}{365} \cdot 0{,}4\right) = 22{,}158 \text{ тыс. руб.};$$

$$S_2' = 30 \cdot \frac{1}{1{,}012} \cdot \left(1 + \frac{20}{365} \cdot 0{,}4\right)^{-1} = 29{,}008 \text{ тыс. руб.};$$

$$S = S_1' + S_2' = 22{,}158 + 29{,}008 = 51{,}166 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

5.15. Клиент поместил вклад в банк под простые проценты на срок с 1 февраля по 1 августа. Месячные уровни инфляции в этот период составили: февраль – 33,7%; март – 20%; апрель – 14,5%; май – 3,4%; июнь – 2,5%; июль – 5,2%. Какую годовую ставку простых процентов должен установить банк, чтобы обеспечить реальный уровень доходности 24% годовых? (Использовать правило 360/360).

Ответ: 258,8%.

5.16. Вклад оформлен на депозит сроком на один месяц по простой процентной ставке 60% годовых. Годовой уровень инфляции 40,8%. Определить реальную годовую процентную ставку.

Ответ: 24,58%.

5.17. Банк принимает вклады под процентную ставку 54% годовых. Проценты сложные и начисляются ежемесячно. Средний месячный уровень инфляции составляет 5,9%. Определить реальную номинальную ставку банка, характеризующую доходность.

Ответ: –15,86% (размещение вклада на таких условиях является убыточным).

5.18. Месячные уровни инфляции составляют 3%. Какой должна быть номинальная процентная ставка при ежемесячном начислении процентов, чтобы обеспечить реальную доходность 24% годовых?

Ответ: 60,72%.

5.19. Владелец векселя учел его в банке за 4 месяца до погашения по простой учетной ставке 60% годовых и получил 24 тыс. руб. Годовой уровень инфляции 22,5%. Определить номинальную стоимость векселя и реальную учетную ставку банка.

Ответ: 30 тыс. руб.; 43,2%.

5.20. Три векселя номинальными стоимостями 20, 50 и 40 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 60, 70 и 80 дней объединяются в один со сроком погашения 90 дней. Объединение происходит по ставке простых процентов 36% годовых, по банковской методике. Годовой уровень инфляции 30%. Определить номинальную стоимость объединенного векселя с учетом инфляции.

Ответ: 113,5 тыс. руб.

5.21. Решить предыдущую задачу при условии, что срок погашения объединенного векселя – 50 дней.

Ответ: 105,962 тыс. руб.

6. ФИНАНСОВАЯ РЕНТА

6.1. Постоянная рента и ее параметры

Финансовой рентой или просто *рентой* называется последовательность платежей, производимых через равные промежутки времени. Иногда финансовую ренту называют также *аннуитетом*. Если платежи одинаковые, то рента называется *постоянной*. В нашем курсе рассмотрим только постоянные ренты.

Примерами рент могут служить регулярные взносы в пенсионный или другие фонды, выплаты процентов по ценным бумагам (облигациям, акциям), платежи по потребительскому кредиту и т.п.

Постоянная рента характеризуется следующими параметрами:

– *член ренты* R – размер отдельного платежа;

– *период ренты* τ – временной интервал между двумя последовательными платежами;

– *срок ренты* n – время от начала первого периода ренты до конца последнего;

– *процентная ставка* i.

Заметим, что размер ставки не всегда прямо оговаривается в контракте, однако знание его необходимо для анализа финансовой операции.

Для некоторых видов рент необходимо указать дополнительные условия и параметры, например, способ и частоту начисления процентов.

Как правило, на практике требуется найти одну или две обобщающие характеристики ренты: наращенную сумму S и современную стоимость A. Наращенная сумма ренты – это сумма всех членов ренты с начисленными на них к концу срока процентами. Современная стоимость ренты – это сумма всех членов ренты, дисконтированных на начало срока.

По моменту выплат различают следующие виды рент:

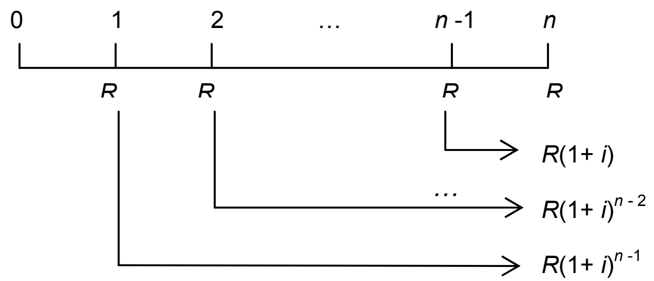
– ренты *постнумерандо* (*обычные*), в которых платежи осуществляются в конце периодов;

– ренты *пренумерандо* (*авансированные*), в которых платежи осуществляются в начале периодов.

Ренты делятся также на *простые* и *общие*. Если период ренты совпадает с периодом начисления процентов, рента называется простой, в противном случае – общей.

6.2. Простая рента постнумерандо

Пусть период ренты равен одному году, и начисление процентов производится по сложной процентной ставке также один раз в год. Запишем уравнение эквивалентности наращенной суммы ренты сумме платежей на дату последнего платежа.



$$S = R + R\cdot(1+i) + R\cdot(1+i)^2 + \ldots + R\cdot(1+i)^{n-1}.$$

Воспользовавшись формулой суммы членов геометрической прогрессии, получаем:

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (6.1)$$

Введем множитель наращения простой ренты постнумерандо:

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

тогда

$$S = R\cdot s_{n;i}.$$

Современную стоимость ренты A определим из условия эквивалентности текущей и наращенной сумм:

$$A = S\cdot(1+i)^{-n}.$$

Подставляя сюда выражение для S из (6.1), получаем

$$A = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (6.2)$$

Величина

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

называется дисконтирующим множителем простой обычной ренты. Используя этот множитель, получаем:

$$A = R\cdot a_{n;i}.$$

Значения множителей наращения и множителей дисконтирования ренты приводятся в специальных таблицах.

Из равенств (6.1), (6.2) нетрудно получить формулы для вычисления следующих параметров ренты:

– величины платежа:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} = \frac{S\cdot i}{(1+i)^n - 1}; \qquad R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{A\cdot i}{1-(1+i)^{-n}};$$

– срока ренты:

$$n = \frac{\ln\left[\left(\frac{S}{R}\right)\cdot i + 1\right]}{\ln(1+i)}; \qquad n = -\frac{\ln\left[1-\left(\frac{A}{R}\right)\cdot i\right]}{\ln(1+i)}.$$

Нахождение процентной ставки из уравнения (6.1) или (6.2) представляет собой гораздо более сложную задачу. Поскольку эти уравнения нелинейные относительно *i,* приходится применять приближенные или численные методы для их решения.

Если период простой ренты отличается от года, то все приведенные выше формулы сохраняются, только теперь срок ренты n измеряется не годами, а числом периодов, а процентная ставка определяется через номинальную процентную ставку j: $i = j / m$, где m – число периодов в году.

Пример 1. Найти текущее и наращенное значения для ренты постнумерандо, состоящей из трех годовых выплат по 100 тыс. руб. каждая, при начислении процентов по ставке 10% годовых.

Решение. $R = 100$; $n = 3$; $i = 0{,}1$.

При наличии таблиц множителей наращения и дисконтирования ренты можно воспользоваться формулами

$$A = R \cdot a_{3;0,1}; \qquad S = R \cdot s_{3;0,1}.$$

Из таблиц по заданным значениям n, i находим: $a_{3;0,1} = 2{,}4869$; $s_{3;0,1} = 3{,}3100$. Затем вычисляем

$$A = 100 \cdot 2{,}4869 = 248{,}69 \text{ тыс. руб.}; \; S = 100 \cdot 3{,}31 = 331 \text{ тыс. руб.}$$

Современные вычислительные средства позволяют выполнить расчеты непосредственно по формулам (6.2) и (6.1) без использования таблиц:

$$A = 100 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-3}}{0{,}1} = 248{,}6852 \text{ тыс. руб.};$$

$$S = 100 \cdot \frac{(1+0{,}1)^{3}-1}{0{,}1} = 331 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2. Найти текущее и наращенное значения ренты с выплатами по 320 тыс. руб. в конце каждого месяца в течение двух лет. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 24% годовых.

Решение. $R = 320$; $n = 24$; $j = 0{,}24$; $m = 12$.

Найдем $i = j / m = 0{,}24 / 12 = 0{,}02$ и воспользуемся формулами (6.1), (6.2):

$$S = 320 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{24}-1}{0{,}02} = 9734{,}99599 \text{ тыс. руб.};$$

$$A = 320 \cdot \frac{1-(1+0{,}02)^{-24}}{0{,}02} = 6052{,}4562 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3. Найти размер ежемесячных платежей обычной ренты, текущее значение которой 100 тыс. руб., срок 6 месяцев. Проценты начисляются по ставке 3% в месяц.

Решение. $A = 100$; $n = 6$; $i = 0{,}03$.

$$R = \frac{100 \cdot 0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-6}} = 18{,}45975 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 4. АО создает резервный фонд, для чего ежегодно в конце года переводит в банк по 10 млн. руб. Определить срок, за который на счету фирмы будет 100 млн. руб. при ставке 10% годовых и начислении процентов один раз в год.

Решение. $R = 10$; $S = 100$; $i = 0{,}1$.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{100}{10} \cdot 0{,}1 + 1\right)}{\ln(1+0{,}1)} = 7{,}2725 \text{ лет.}$$

Если принять срок ренты $n = 7$, то ежегодный платеж должен быть равен

$$R = \frac{100 \cdot 0{,}1}{(1+0{,}1)^{7}-1} = 10{,}54055 \text{ млн. руб.}$$

Задачи

6.1. Вкладчик в конце каждого месяца кладет в банк 1 тыс. руб. Проценты на вклад начисляются ежемесячно по номинальной годовой ставке 12%. Определить сумму на счете через 2 года.

Ответ: 26,973 тыс. руб.

6.2. Вкладчик намеревается положить в банк такую сумму, чтобы, снимая в конце каждого года по 10 тыс. руб., через пять лет израсходовать весь вклад. Определить сумму вклада, если годовая ставка сложных процентов – 12%.

Ответ: 36,048 тыс. руб.

6.3. Вкладчик желает накопить в течение двух лет в банке 30 тыс. руб., производя ежемесячные равные вклады под сложные проценты по номинальной годовой ставке 12% при ежемесячном начислении процентов. Определить сумму ежемесячного вклада.

Ответ: 1112,2 руб.

6.4. В конце каждого месяца на счет в банке поступает 1 тыс. руб. под номинальную годовую ставку 48% при ежемесячном начислении. Какой срок необходим для того, чтобы сумма на счете достигла 250 тыс. руб.?

Ответ: 5,1 года.

6.3. Общая рента постнумерандо

В общем случае период ренты может не совпадать с периодом начисления процентов. Для расчета параметров общей ренты целесообразно свести ее к эквивалентной простой ренте, для которой уже получены все расчетные формулы.

Пусть W – размер отдельного платежа общей ренты, p – число выплат в году, m – число периодов начисления в году, i – процентная ставка за период начисления. Для того чтобы данная общая и некоторая простая рента с периодом, равным периоду начисления, были эквивалентны, необходимо выполнение следующих двух условий:

– процентные ставки за периоды этих рент должны быть эквивалентны;

– значения этих рент, соответствующие одному и тому же моменту времени, должны совпадать.

Пусть j – процентная ставка, соответствующая периоду общей ренты. Тогда согласно условию эквивалентности ставок имеем равенство

$$(1+j)^p = (1+i)^m. \tag{6.3}$$

Приравниваем наращенные за год значения обеих рент:

$$R \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i} = W \cdot \frac{(1+j)^p - 1}{j}.$$

Из двух последних равенств следует

$$\frac{R}{i} = \frac{W}{j}. \tag{6.4}$$

Из (6.3) находим

$$j = (1+i)^{\frac{m}{p}} - 1.$$

Подставляя это выражение в (6.4), получаем формулу для платежа эквивалентной простой ренты:

$$R = W \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{6.5}$$

Теперь, пользуясь формулами (6.1), (6.2) и (6.5), находим формулы для текущего и наращенного значений общей ренты:

$$A = W \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1};$$

$$S = W \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Здесь n – срок в периодах заменяющей простой ренты.

Эти же формулы можно записать через номинальную годовую ставку j:

$$A = W \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1};$$

$$S = W \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1},$$

где теперь n – срок ренты в годах.

Пример 1. Заменить ренту с выплатами по 140 тыс. руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по кварталам по ставке 10% годовых простой рентой с поквартальными выплатами.

Решение. $W = 140$; $p = 2$; $m = 4$; $i = (0{,}1)/4 = 0{,}025$.

$$R = 140 \cdot \frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{\frac{4}{2}}-1} = 69{,}1358 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2. Найти наращенное значение обычной ренты с выплатами по 95 тыс. руб. в конце каждого года при поквартальном начислении процентов по ставке 8% годовых. Срок ренты – 3 года.

Решение. $W = 95$; $n = 12$; $p = 1$; $m = 4$; $i = (0{,}08)/4 = 0{,}02$.

$$S = 95 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{12}-1}{(1+0{,}02)^{4}-1} = 309{,}1387 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

6.5. Рента с выплатами по 50 тыс. руб. в конце каждого месяца и начислением процентов по кварталам по ставке 6%

годовых заменяется простой рентой с поквартальными выплатами. Найти величину платежа в конце каждого квартала.

Ответ: 150,748 тыс. руб.

6.6. Найти текущее значение ренты с выплатами по 60 тыс. руб. в конце каждого квартала при ежемесячном начислении процентов по номинальной ставке 12% годовых. Срок ренты – 1,5 года.

Ответ: 324,707 тыс. руб.

6.7. Найти текущее и наращенное значения ренты с выплатами по 110 тыс. руб. в конце каждого полугодия при годовом начислении процентов по номинальной ставке 5%. Срок ренты – 4 года.

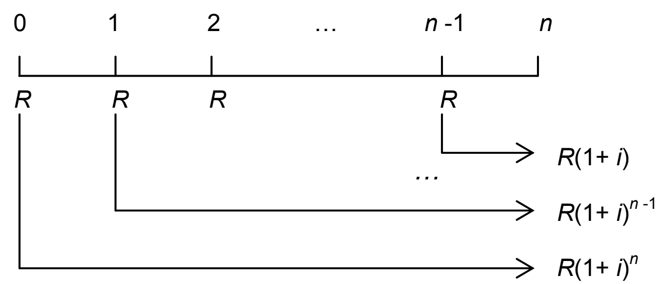
Ответ: 789,742 тыс. руб.; 959,936 тыс. руб.

6.8. Кредит в размере 600 тыс. руб. выдан под 16% годовых при начислении процентов по полугодиям. Определить размер поквартальных погасительных платежей, необходимый для погашения кредита за 1,5 года.

Ответ: 114,171 тыс. руб.

6.4. Простая рента пренумерандо

Изобразим временную диаграмму платежей простой авансированной ренты и составим для нее уравнение эквивалентности на конец срока ренты.



$$S = R(1+i) + R\cdot(1+i)^2 + R\cdot(1+i)^3 + \ldots + R\cdot(1+i)^n.$$

Отсюда

$$S = R\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (6.6)$$

Текущую стоимость ренты найдем, используя формулу дисконтирования по сложным процентам:

$$A = \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Подставляя сюда S из (6.6), получаем:

$$A = R\cdot(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (6.7)$$

Из формул (6.6) и (6.7) нетрудно получить формулы для расчета параметров ренты: размера платежа R и срока ренты n.

6.5. Отложенная рента

Если срок ренты начинается в некоторый момент в будущем, то такая рента называется *отложенной*. Отложенную ренту принято считать обычной, поэтому мы рассматриваем простую отложенную ренту постнумерандо.

Промежуток времени от настоящего момента до начала ренты называется *периодом отсрочки* t. Например, период отсрочки ренты с выплатами по полугодиям и первой выплатой через четыре года равен 3,5 года.

Очевидно, что отсрочка никак не отражается на величине наращенной суммы, она остается такой же, как и для немедленной (неотложенной) ренты. Современная же стоимость отложенной ренты ${}_tA$ определяется следующим образом: сначала находим текущее значение ренты на конец периода отсрочки, затем дисконтируем это значение на начало периода:

$${}_tA = A\cdot v^t = R\cdot a_{n;i}\cdot v^t,$$

или

$${}_tA = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^t}.$$

Рассмотрим следующую задачу, в которой используется современная стоимость отложенной ренты.

Пусть годовая рента сроком n и выплатами R делится между двумя участниками с условием, что каждый участник получает 50% капитализированной стоимости ренты, причем рента выплачивается последовательно – сначала первому участнику, затем второму.

Для решения задачи необходимо найти срок n_1 получения ренты первым участником. В оставшийся срок $(n - n_1)$ ренту получает второй участник. Таким образом, первый участник получает немедленную ренту, а второй – отложенную. Из условий деления ренты следует:

$$R\cdot a_{n_1;i} = R\cdot a_{n-n_1;i}v^{n_1},$$

или

$$\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-n_1)}}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n_1}}.$$

Отсюда находим

$$(1+i)^{n_1} - 1 = 1-(1+i)^{-n+n_1};$$

$$(1+i)^{n_1}[1+(1+i)^{-n}] = 2;$$

$$n_1 = \frac{\ln\{2/[1+(1+i)^{-n}]\}}{\ln(1+i)}. \qquad (6.8)$$

<u>Пример</u>. Срок годовой ренты постнумерандо 10 лет, процентная ставка 20%. Рента делится между двумя участниками на вышеизложенных условиях. Найти долю ренты для каждого участника.

Решение. $n = 10$; $i = 0{,}2$. По формуле (6.8) находим

$$n_1 = \frac{\ln\{2/[1+(1+0{,}2)^{-10}]\}}{\ln(1+0{,}2)} = 2{,}981 \approx 3 \text{ года.}$$

Доля первого участника – 3 года, второго участника – следующие 7 лет.

6.6. Вечная рента

Под вечной, или бессрочной, рентой понимают последовательность платежей, количество которых не ограничено, теоретически она выплачивается бесконечное число лет. Примером такой ренты могут служить периодические выплаты на инвестированный капитал. Вечные ренты также подразделяются на простые и сложные, постнумерандо и пренумерандо, отложенные и т.д.

Очевидно, что наращенная сумма вечной ренты есть бесконечно большая величина и не имеет какого-либо реального смысла. Поэтому обобщающей характеристикой вечной ренты является лишь одна величина – современная стоимость.

Получим формулу для современной стоимости вечной годовой простой ренты постнумерандо, переходя к пределу при $n \to \infty$:

$$A = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Пример. Найти сумму, необходимую для основания фонда, который обеспечивает выплаты 750 тыс. руб. в конце каждого года, если деньги могут быть инвестированы по ставке 3% годовых.

Решение. Имеем дело с годовой вечной рентой постнумерандо с параметрами $R = 750$, $i = 0{,}03$.

$$A = \frac{R}{i} = \frac{750}{0{,}03} = 25000 \text{ тыс. руб.}$$

В случае вечной общей ренты постнумерандо для современной стоимости получаем формулу

$$A = \lim_{n\to\infty} W \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{W}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Задачи

6.9. Найти сумму, необходимую для основания фонда, который обеспечивает выплаты 10 тыс. руб. в конце каждого месяца, если деньги могут быть инвестированы по номинальной ставке 6% годовых при ежемесячном начислении.

Ответ: 2 млн. руб.

6.10. Найти текущее значение бессрочной ренты с выплатами 10 тыс. руб. в конце каждого месяца при эффективной ставке 30% годовых и ежемесячном начислении процентов.

Ответ: 452,398 тыс. руб.

6.7. Конверсия рент

Под *конверсией* рент понимают замену рент с одними условиями на ренты с другими условиями. Частными случаями конверсии рент являются:

– *выкуп ренты* – замена ренты разовым платежом;

– *рассрочка платежа* – замена разового платежа рентой;

– *консолидация рент* – объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну ренту.

Любая конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности. Рассмотрим некоторые виды конверсии.

Выкуп ренты. Условием эквивалентности здесь является равенство размера выкупа современной стоимости выкупаемой ренты.

Рассрочка платежа. Для решения этой задачи приравниваем современную стоимость ренты сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты – члена ренты или ее срока – при условии, что остальные параметры заданы.

Объединение рент. В этом случае принцип финансовой эквивалентности выражается равенством

$$A = \sum_k A_k, \tag{6.9}$$

где A – современная стоимость заменяющей ренты, A_k – современные стоимости заменяемых рент.

Для заменяющей ренты необходимо задать ее вид и все параметры, кроме одного. Затем надо определить неизвестный параметр, исходя из уравнения эквивалентности. Обычно в качестве неизвестного параметра принимается член ренты или ее срок. Так, если заменяющая рента постнумерандо является простой немедленной и задан ее срок, то из равенства (6.9) следует

$$R = \frac{\sum A_k}{a_{n;i}} = \frac{\sum A_k \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Пример. Три ренты постнумерандо – немедленные, годовые – заменяются одной отложенной на 3 года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_k = 100, 120, 300 тыс. руб., n_k = 6, 11, 8 лет, i_k = 0,2.

Решение. Находим современные стоимости заменяемых рент:

$$A_k = R_k \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-n_k}}{i_k};$$

получаем: A_1 = 332,551 тыс. руб.; A_2 = 519,247 тыс. руб.; A_3 = = 1151,148 тыс. руб.

Примем для заменяющей ренты процентную ставку i равной 0,2 и найдем величину выплат, учитывая, что рента отложена на 3 года:

$$R = \frac{{}_tA}{a_{n;i}v^t} = \frac{\sum A_k \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot (1+i)^3;$$

$$R = \frac{(332{,}551+519{,}247+1151{,}148)\cdot 0{,}2}{1-(1+0{,}2)^{-7}} \cdot (1+0{,}2)^3 =$$

= 969,189 тыс. руб.

Допустим теперь, что задан не срок заменяющей ренты, а величина годового платежа R = 1500 тыс. руб. и надо определить срок заменяющей ренты.

Сначала находим текущую стоимость ренты на момент конца отсрочки:

$$A = {}_tA \cdot (1+i)^3 = \sum_k A_k \cdot (1+i)^3;$$

$$A = (332{,}551+519{,}247+1151{,}148)(1+0{,}2)^3 = 3461{,}091 \text{ тыс. руб.}$$

Затем находим срок немедленной ренты (начинающейся через три года от текущего момента):

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\cdot i\right)}{\ln(1+i)} = -\frac{\ln\left(1-\frac{3461{,}091}{1500}\cdot 0{,}2\right)}{\ln(1+0{,}2)} = 3{,}395 \text{ года.}$$

Полученное значение округляем до целого числа лет, например до n = 3, и пересчитываем значение члена ренты:

$$R = \frac{A\cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{3461{,}091\cdot 0{,}2}{1-(1+0{,}2)^{-3}} = 1643{,}07 \text{ тыс. руб.}$$

6.8. Изменение условий ренты

Изменение какого-либо условия ренты по существу означает замену одной ренты другой. Такая замена должна основываться на принципе финансовой эквивалентности, состоящем в равенстве современных стоимостей обеих рент. Рассмотрим некоторые виды замен.

Замена немедленной ренты на отложенную. Пусть имеется немедленная рента постнумерандо с параметрами R_1, n_1. Необходимо отсрочить выплаты на t лет, т.е. заменить данную ренту отложенной с параметрами R_2, n_2, t (t не входит в срок ренты). Процентные ставки i обеих рент принимаем одинаковыми.

Приравниваем современные стоимости рент:

$$R_1 \cdot a_{n_1;i} = R_2 \cdot a_{n_2;i} \cdot v^t.$$

Отсюда можем находить требуемые параметры ренты. Пусть, например, длительность срока выплат по отложенной ренте остается той же, что и для немедленной, т.е. $n_1 = n_2 = n$. Тогда величина годового платежа равна

$$R_2 = R_1(1+i)^t.$$

Пусть теперь величина платежа не меняется, т.е. $R_2 = R_1$, тогда

$$\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Отсюда

$$n_2 = -\frac{\ln\{1-[1-(1+i)^{-n_1}](1+i)^t\}}{\ln(1+i)}.$$

Замена годовой ренты на ренту с p выплатами в году. Пусть срок заменяющей ренты остается равным сроку заменяемой ренты – n лет, а период начисления процентов берется равным периоду заменяющей ренты. Тогда условие эквивалентности рент записывается так:

$$R_2 \cdot a_{np;i/p} = R_1 \cdot a_{n;i}.$$

Отсюда находим размер выплат заменяющей ренты:

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{a_{n;i}}{a_{np;i/p}} = \frac{R_1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i/p)^{-np}}.$$

Если же период начисления процентов остается равным году, то заменяющая рента является общей, и в этом случае, приравнивая современные стоимости рент, получаем следующее равенство:

$$W \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = R_1 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Отсюда находим величину платежей заменяющей ренты:

$$W = R_1 \cdot \frac{(1+i)^{1/p}-1}{i}.$$

Задачи

В задачах 6.11 и 6.12 на объединение рент используются следующие обозначения: n – срок ренты; m – число периодов начисления процентов в году; p – число периодов ренты в году; j – номинальная процентная ставка (годовая); W – величина разового платежа (член ренты); t – период отсрочки ренты.

6.11. Требуется объединить три ренты постнумерандо, параметры которых приведены в табл. 6.1, в одну с ежемесячными платежами в конце месяца и ежемесячным начислением процентов. Срок объединенной ренты – один год, номинальная процентная ставка – 28%, рента начинается немедленно. Найти размер платежа объединенной ренты.

Таблица 6.1

№	n, лет	m	p	j, %	W, тыс. руб.	t, лет
1	2	4	4	24	24	0
2	1	12	4	30	50	0
3	1,5	6	4	28	120	0

Ответ: 85,538 тыс. руб.

6.12. Требуется объединить три ренты постнумерандо, (см. табл. 6.2) в одну ренту с поквартальным начислением процентов и выплатами в конце квартала. Для объединенной ренты срок – 2 года, номинальная процентная ставка 30%, период отсрочки – полгода.

Таблица 6.2

№	*n*, лет	*m*	*p*	*j*, %	*W*, тыс. руб.	*t*, лет
1	1	4	4	36	18	0
2	2	6	6	24	24	0
3	2,5	12	2	28	36	1

Ответ: 74,065 тыс. руб.

7. ОБЛИГАЦИИ

7.1. Основные понятия

Облигации представляют собой один из видов ценных бумаг, выпускаемых государством или коммерческой компанией. Выпустившая облигации организация называется *эмитентом*. Организация или лицо, приобретшее облигацию, называется держателем или владельцем облигации.

Облигация является долговым обязательством, которым эмитент гарантирует владельцу выплату определенной суммы в указанный момент времени и, возможно, разовую или периодическую выплату процентов.

На облигации обычно указывается ее номинальная стоимость N, т.е. та сумма, которую получит владелец, и дата погашения. Покупная цена облигации P, по которой она приобретается, может отличаться от номинала.

Покупная цена, выраженная в процентах от номинала, называется курсом облигации p_k:

$$p_k = \frac{P}{N} \cdot 100.$$

Облигации приобретаются с целью получения дохода. Доход от облигаций состоит из двух основных частей:

– периодически или в конце срока выплачиваемых процентов;

– разности между номиналом и ценой приобретения облигации.

Рассмотрим далее только основные виды облигаций: облигации без выплаты процентов, с выплатой процентов при погашении и с периодической выплатой процентов.

Задачи

7.1. Номинальная стоимость облигации – 200 тыс. руб. Куплено 10 облигаций по курсу 90. Определить стоимость покупки.

Ответ: 1800 тыс. руб.

7.2. Номинальная стоимость облигации – 200 тыс. руб. Цена продажи – 185 тыс. руб. Определить курс облигации.

Ответ: 92,5.

7.2. Облигации без выплаты процентов

Доход от такой облигации образуется за счет разности между номинальной стоимостью и ценой покупки:

$$Д = N - P = N \cdot (1 - 0{,}01 \cdot p_k).$$

Эту разность называют также дисконтом.

У облигаций такого вида обычно короткий срок погашения (до года), поэтому доходность покупки такой облигации определим, используя эффективную ставку простых процентов. Запишем уравнение эквивалентности:

$$P \cdot n \cdot i_e = N - P,$$

где n – срок в годах от покупки облигации до погашения.

Из уравнения находим

$$i_e = \frac{N - P}{P \cdot n} = \frac{100 \cdot P / p_k - P}{P \cdot n} = \frac{100 - p_k}{p_k \cdot n} = \frac{100 - p_k}{p_k} \cdot \frac{K}{t}.$$

Здесь t – срок в днях, K – временная база (K = 360, 365).

<u>Пример</u>. Облигации номиналом 1 тыс. руб. со сроком обращения 90 дней продаются по курсу 85. Определить сумму дохода от покупки 5 облигаций и доходность этой финансовой операции при K = 360 дней.

Решение. $N = 1000$, $t = 90$, $p_k = 85$, $K = 360$.

Доход от покупки пяти облигаций:

$$Д = 5 \cdot N \cdot (1 - 0{,}01 p_k) = 5 \cdot 1000 \cdot (1 - 0{,}01 \cdot 85) = 750 \text{ руб.}$$

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_e = \frac{100 - p_k}{p_k} \cdot \frac{K}{t} = \frac{100 - 85}{85} \cdot \frac{360}{90} = 0{,}706 \quad (70{,}6\%).$$

Задача

7.3. Фирма купила 20 облигаций без выплаты процентов номинальной стоимостью 1 млн. руб. каждая по курсу 88. Срок обращения облигаций – 42 дня. Определить доход фирмы и доходность покупки по эффективной ставке простых процентов. Количество дней в году – 365.

Ответ: 2,4 млн. руб.; 118,5%.

7.3. Облигации с выплатой процентов при погашении

Такие облигации обычно выпускаются на продолжительный срок. Прибыль на эти облигации состоит из процентов, начисляемых по ставке сложных процентов, и из разности между номинальной стоимостью облигации и ценой покупки. Цена покупки может быть в данном случае и выше номинальной стоимости.

Доход от облигации рассматриваемого вида при годовом начислении процентов по ставке i вычисляется по формуле

$$Д = N - P + N \cdot [(1 + i)^n - 1] = N \cdot [(1 + i)^n - 0{,}01 p_k].$$

Доходность облигации оценивается эффективной ставкой сложных процентов. Для нахождения ее имеем следующее уравнение эквивалентности:

$$P \cdot \left[(1 + i_e)^n - 1\right] = \frac{100 \cdot P}{p_k} \cdot \left[(1 + i)^n - 0{,}01 p_k\right].$$

Решаем это уравнение относительно i_e:

$$\left(1+i_e\right)^n = \frac{\left(1+i\right)^n - 0{,}01p_k}{0{,}01p_k} + 1;$$

$$\left(1+i_e\right)^n = \frac{\left(1+i\right)^n}{0{,}01p_k};$$

$$i_e = \frac{1+i}{\left(0{,}01p_k\right)^{\frac{1}{n}}} - 1.$$

Пример. Фирма купила 30 облигаций номинальной стоимостью по 100 тыс. руб. и сроком погашения 5 лет. Облигации приобретены по курсу 97, выпущены под процентную ставку сложных процентов 7% годовых. Определить прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов.

Решение. $N = 100$; $n = 5$; $i = 0{,}07$; $p_k = 97$.

$$Д = 30 \cdot 100 \cdot [(1+0{,}07)^5 - 0{,}97] = 1298 \text{ тыс. руб.}$$

$$i_e = \frac{1+0{,}07}{\left(0{,}97\right)^{\frac{1}{5}}} - 1 = 0{,}07654 \quad (7{,}654\%).$$

Задача

7.4. Фирма купила 8 облигаций номинальной стоимостью 2 млн. руб. каждая по курсу 95. Срок погашения облигации – 3 года. Проценты по облигациям выплачиваются в конце срока по сложной ставке 30% годовых. Определить доход и доходность сделки по эффективной ставке сложных процентов.

Ответ: 19,952 млн. руб.; 32,24%.

7.4. Облигации с периодической выплатой процентов

Это самый общий из рассматриваемых видов облигаций. Прибыль складывается из разности между номинальной стоимостью и ценой покупки и из периодически выплачиваемых по купонам процентов.

Максимальный доход от облигаций такого вида будет получен в том случае, если получаемые процентные деньги реинвестируются, т.е. помещаются на банковский депозит и на них идет наращение процентов.

Пусть q – годовая купонная ставка, k – количество выплат за год. Тогда каждая выплата равна

$$\frac{N \cdot q}{k}.$$

Эта сумма реинвестируется под сложные проценты с номинальной процентной ставкой j и начислением процентов m раз в году. Такой процесс продолжается n лет до погашения облигации. Наращенная сумма купонных выплат есть наращенная сумма общей ренты постнумерандо и она, как известно, равна

$$\frac{N \cdot q}{k} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1}.$$

Теперь можем записать общий доход от облигации:

$$Д = N - 0{,}01p_k N + \frac{N \cdot q}{k} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1} =$$

$$= N \cdot \left[1 - 0{,}01p_k + \frac{q}{k} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1}\right].$$

Доходность облигации опять оцениваем эффективной ставкой сложных процентов, которую найдем из соответствующего уравнения эквивалентности:

$$P \cdot [(1+i_e)^n - 1] = Д;$$

$$0{,}01 p_k N \cdot [(1+i_e)^n - 1] = Д;$$

$$(1+i)^n = \frac{Д}{0{,}01 p_k N} + 1 = \frac{Д + 0{,}01 p_k N}{0{,}01 p_k N};$$

$$i_e = \left[\frac{Д + 0{,}01 p_k N}{0{,}01 p_k N}\right]^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Подставив сюда выражение для *Д*, получаем:

$$i_e = \left[\frac{100}{p_k} \cdot \left(1 + \frac{q}{k} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1}\right)\right]^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Если полученные по купонам проценты не реинвестируются, то

$$Д = N \cdot (1 - 0{,}01 p_k + qn),$$

и соответственно

$$i_e = \left(\frac{1+qn}{0{,}01 p_k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Пример. Министерство финансов России в 1995 году выпустило облигации номинальной стоимостью 500 тыс. руб.

сроком на один год. Выплата процентов 4 раза в год по процентной ставке 102,74% годовых.

Клиент приобрел облигацию по курсу 99. Процентные деньги могут вновь инвестироваться по номинальной процентной ставке 60% с начислением процентов один раз в год. Определить прибыль от покупки облигации и эффективную процентную ставку для двух случаев: а) без реинвестирования процентов, б) с реинвестированием.

Решение. $N = 500$; $n = 1$; $q = 1{,}0274$; $k = 4$; $p_k = 99$; $j = 0{,}6$; $m = 1$.

а) без реинвестирования:

$$Д = 500 \cdot (1 - 0{,}99 + 1{,}0274) = 518{,}7 \text{ тыс. руб.};$$

$$i_e = \left(\frac{1+1{,}0274}{0{,}99}\right) - 1 = 1{,}0479 \quad (104{,}79\%).;$$

б) с реинвестированием:

$$Д = 500 \cdot \left[1 - 0{,}99 + \frac{1{,}0274}{4} \cdot \frac{(1+0{,}6) - 1}{(1+0{,}6)^{\frac{1}{4}} - 1}\right] = 623{,}009 \text{ тыс. руб.};$$

$$i_e = \frac{623{,}009 + 0{,}99 \cdot 500}{0{,}99 \cdot 500} - 1 = 1{,}2586 \quad (125{,}86\%).$$

Задачи

7.5. Фирма приобрела пакет из 40 облигаций номинальной стоимостью 2 млн. руб. каждая по курсу 90. Срок погашения – 4 года. Доход по облигациям выплачивается ежегодно по ставке 24% годовых и реинвестируется по ставке 33% годовых. Определить доход от облигаций и доходность.

Ответ: 131,86951 млн. руб.; 29,72%.

7.6. Фирма приобрела 30 облигаций номинальной стоимости 500 тыс. руб. каждая по курсу 95. Срок погашения облигаций – 2 года. Проценты по облигациям выплачиваются по полугодиям по годовой процентной ставке 36%. Полученные деньги реинвестируются по ставке 30% годовых с поквартальным начислением процентов. Определить доход и доходность покупки облигаций.

Ответ: 14342,868 тыс. руб.; 41,65%.

8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется финансовым событием, финансовым потоком? Как их можно изобразить графически?
2. Что такое простая кредитная сделка? Назовите параметры простой кредитной сделки.
3. Запишите формулу простых процентов. Объясните смысл входящих в нее параметров.
4. В чем заключаются германская, французская и английская практики начисления процентов по годовой процентной ставке при задании срока кредита в днях?
5. Запишите обобщенные формулы простых процентов для случаев: а) переменной процентной ставки; б) изменяющейся суммы депозита.
6. В чем заключается актуарный метод погашения задолженности частями?
7. В чем заключается правило торговца при погашении задолженности частями?
8. Как производится начисление процентов и погашение долга в потребительском кредите?
9. Что такое математическое дисконтирование? Как оно выполняется в схеме простых процентов?
10. Что такое банковский учет векселя? Как он выполняется по простой учетной ставке?
11. В каком случае процентная и учетная ставки называются эквивалентными? Как они связаны между собой в схеме простых процентов?
12. Как найти срок ссуды или процентную ставку в схеме простых процентов, если известны текущая и наращенная денежные суммы?
13. Запишите формулу сложных процентов. Объясните смысл входящих в нее величин.
14. В чем заключаются общий и смешанный методы начисления процентов по сложной годовой ставке при нецелом числе лет?
15. Что такое номинальная и эффективная процентные ставки? Как они связаны между собой?

16. Как выполняются математическое дисконтирование и банковский учет в схеме сложных процентов?
17. Что такое номинальная и эффективная учетные ставки? Как они связаны между собой?
18. Как найти срок ссуды или процентную ставку в схеме сложных процентов, если известны текущее и наращенное значения ссуды?
19. Как вычислить среднюю процентную ставку в схеме простых и в схеме сложных процентов?
20. В каком случае два платежа, осуществляемые в разные сроки, являются эквивалентными?
21. Что такое консолидация платежей? Как найти сумму консолидированного платежа?
22. Что такое инфляция? Какими показателями она характеризуется и как они связаны между собой?
23. Как по месячным уровням инфляции вычислить годовой? Как по годовому уровню инфляции вычислить средний уровень инфляции за срок t дней?
24. Что такое финансовая рента? В каком случае рента называется: а) постоянной; б) простой; в) постнумерандо; г) пренумерандо?
25. Выведите формулы для наращенной и современной стоимостей простой ренты постнумерандо.
26. Выведите формулы для наращенной и современной стоимостей простой ренты пренумерандо.
27. Что такое отложенная рента, вечная рента?
28. Каким образом выполняется объединение рент?
29. Что такое облигация? Что называют курсом облигации?
30. Назовите основные виды облигаций. За счет чего образуется доход от облигаций?

9. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1

Банк выдал кредит в размере P под простые i процентов годовых. Дата выдачи кредита – ∂_1, дата погашения – ∂_2. Определить возвращаемую сумму и проценты при разных практиках начисления: германской (360/360), французской (365/360) и английской (365/365).

Таблица 9.1

Данные к задаче 1

Вариант	P, тыс. руб.	i, %	∂_1	∂_2
1	100	10	01.01.02	12.11.02
2	100	11	05.01.02	12.10.02
3	100	12	09.01.02	12.09.02
4	100	13	13.01.02	12.08.02
5	100	14	17.01.02	23.11.02
6	100	15	21.01.02	23.10.02
7	100	16	24.01.02	23.09.02
8	100	17	27.01.02	23.08.02
9	100	18	31.01.02	30.09.02
10	100	19	01.02.02	30.08.02
11	130	20	05.02.02	10.10.02
12	130	21	09.02.02	12.10.02
13	130	22	13.02.02	14.10.02
14	130	23	17.02.02	16.10.02
15	130	24	21.02.02	18.10.02
16	130	25	24.02.02	20.10.02
17	130	26	28.02.02	22.10.02
18	130	27	01.03.02	24.10.02
19	130	28	05.03.02	26.10.02
20	130	29	09.03.02	28.10.02
21	70	10	11.03.02	14.07.02
22	70	15	13.03.02	15.08.02
23	70	20	15.03.02	16.09.02
24	70	25	17.03.02	15.10.02
25	70	30	19.03.02	14.11.02

Задача 2

Клиент поместил в банк сумму 100 тыс. руб. в момент времени ∂_1 под простые i_1 процентов годовых. В моменты времени ∂_2 и ∂_3 процентная ставка заменялась на i_2 и i_3 соответственно. В момент времени ∂_4 вклад был изъят. Определить доход клиента и эффективную ставку простых процентов, если расчет выполняется по банковскому правилу.

Таблица 9.2

Данные к задаче 2

Вар.	∂_1	i_1,%	∂_2	i_2,%	∂_3	i_3,%	∂_4
1	03.02.02	25	12.05.02	22	23.06.02	19	06.08.02
2	04.02.02	24	17.05.02	20	28.06.02	18	11.08.02
3	09.02.02	23	25.05.02	20	01.07.02	17	29.08.02
4	11.02.02	22	30.05.02	18	05.07.02	16	01.09.02
5	18.02.02	21	02.06.02	18	15.07.02	15	28.08.02
6	21.02.02	20	14.06.02	19	12.07.02	17	05.09.02
7	23.02.02	19	19.04.02	16	28.06.02	13	15.08.02
8	25.02.02	18	29.04.02	15	10.06.02	12	26.07.02
9	28.02.02	17	03.04.02	15	26.05.02	11	15.07.02
10	01.03.02	16	09.04.02	13	17.05.02	10	31.07.02
11	03.03.02	30	13.04.02	26	08.06.02	21	16.08.02
12	05.03.02	28	27.04.02	23	12.06.02	18	25.07.02
13	07.03.02	26	18.04.02	21	05.06.02	17	27.07.02
14	09.03.02	24	21.04.02	21	14.06.02	18	06.08.02
15	11.03.02	22	16.05.02	19	11.06.02	16	12.08.02
16	13.03.02	20	03.05.02	18	12.05.02	15	26.08.02
17	15.03.02	18	05.05.02	16	17.06.02	14	14.09.02
18	17.03.02	16	30.04.02	13	22.07.02	10	15.09.02
19	19.03.02	34	12.05.02	30	04.06.02	25	23.09.02
20	21.03.02	32	17.06.02	28	13.07.02	22	29.10.02
21	23.03.02	30	19.05.02	25	24.07.02	20	12.10.02
22	25.03.02	28	01.05.02	24	18.08.02	19	30.10.02
23	27.03.02	26	24.04.02	22	11.07.02	17	06.11.02
24	29.03.02	24	05.05.02	20	28.07.02	18	19.11.02
25	31.03.02	22	14.05.02	17	13.08.02	15	30.09.02

Задача 3

В момент времени ∂_1 на счет в банке была положена сумма R_1. В момент ∂_2 со счета снята сумма R_2, в момент ∂_3 добавлена сумма R_3. В момент времени ∂_4 счет был закрыт. Определить сумму, полученную владельцем счета, если процентная ставка – простые i процентов годовых, метод расчета – обыкновенные проценты с приближенным числом дней. (Даты ∂_1, ∂_2, ∂_3 и ∂_4 взять из табл. 9.2.)

Таблица 9.3

Данные к задаче 3

Вар.	R_1, тыс. руб.	R_2, тыс. руб.	R_3, тыс. руб.	i, %
1	100	30	190	15
2	110	35	180	20
3	120	40	170	25
4	130	45	160	30
5	140	50	150	17
6	150	55	140	22
7	160	60	130	27
8	170	65	120	32
9	180	70	110	16
10	190	75	100	21
11	50	20	70	26
12	60	25	70	31
13	70	30	80	15
14	80	35	80	17
15	90	40	90	19
16	100	45	90	21
17	110	50	100	23
18	120	30	100	25
19	130	40	120	27
20	140	50	120	29
21	150	30	140	15
22	160	40	140	20

Окончание табл. 9.3

Вар.	R_1, тыс. руб.	R_2, тыс. руб.	R_3, тыс. руб.	i, %
23	170	50	120	25
24	180	60	110	30
25	190	60	100	35

Задача 4

Кредит на сумму P выдан в момент времени ∂_1 под простые i процентов годовых. В счет погашения долга в момент ∂_2 поступила сумма R_1, в момент ∂_3 – сумма R_2. Найти остаток долга на дату погашения кредита ∂_4, если используется правило торговца и точные проценты с точным числом дней. (Даты ∂_1, ∂_2, ∂_3 и ∂_4 взять из табл. 9.2.)

Таблица 9.4.

Данные к задаче 4

Вар.	P, тыс. руб.	i, %	R_1, тыс. руб.	R_2, тыс. руб.
1	50	40	20	20
2	60	35	25	20
3	70	30	30	25
4	80	25	35	30
5	90	20	40	30
6	100	40	45	35
7	110	38	40	40
8	120	36	40	50
9	130	34	50	40
10	140	32	50	45
11	150	30	55	50
12	160	28	60	70
13	170	26	60	75
14	160	24	55	45
15	150	25	70	50
16	140	26	60	55
17	130	27	55	65
18	120	28	40	60
19	110	29	40	55

Окончание табл. 9.4

Вар.	P, тыс. руб.	i, %	R_1, тыс. руб.	R_2, тыс. руб.
20	100	30	35	50
21	90	32	30	45
22	80	34	35	35
23	70	36	25	30
24	60	38	20	30
25	50	40	15	25

Задача 5

Через k месяцев после выдачи кредита должник обязан вернуть сумму S. Какова сумма выданного кредита, если он выдан под простую годовую процентную ставку i?

Задача 6

Номинальная стоимость векселя равна S. За k месяцев до погашения банк учел этот вексель по простой годовой учетной ставке d. Какую сумму получил владелец векселя? Чему равен дисконт?

Таблица 9.5

Данные к задачам 5 и 6

Вариант	S, тыс. руб.	k, мес.	i, %	d, %
1	20	2	40	30
2	25	3	38	28
3	30	4	36	26
4	35	5	34	24
5	40	6	32	22
6	45	2	30	20
7	50	3	28	18
8	55	4	26	16
9	60	5	24	14
10	65	6	22	12
11	70	2	20	10
12	80	3	40	30
13	85	4	38	28

Окончание табл. 9.5

Вариант	S, тыс. руб.	k, мес.	i, %	d, %
14	90	5	36	26
15	95	6	34	24
16	100	2	32	22
17	110	3	30	20
18	120	4	28	18
19	130	5	26	16
20	140	6	24	14
21	150	2	22	12
22	160	3	20	10
23	170	4	40	30
24	180	5	30	35
25	190	6	20	20

Задача 7

Вексель номинальной стоимостью S с датой погашения ∂_2 предъявлен в банк для учета в момент времени ∂_1. Учетная ставка банка – простые d процентов годовых. Определить сумму, выплаченную владельцу векселя, и дисконт при использовании банковского правила 365/360.

Таблица 9.6

Данные к задаче 7

Вар.	S, тыс. руб.	∂_1	∂_2	d, %
1	100	01.04.02	26.10.02	20
2	110	03.04.02	24.10.02	25
3	120	05.04.02	22.10.02	30
4	130	07.04.02	20.10.02	35
5	140	09.04.02	18.10.02	40
6	150	11.04.02	16.10.02	20
7	160	13.04.02	14.10.02	25
8	170	15.04.02	12.10.02	30
9	180	17.04.02	10.10.02	35
10	190	19.04.02	08.10.02	40
11	100	21.04.02	06.10.02	20
12	110	23.04.02	04.10.02	25

Окончание табл. 9.6

Вар.	S, тыс. руб.	∂_1	∂_2	d, %
13	120	25.04.02	02.10.02	30
14	130	27.04.02	30.11.02	35
15	140	29.04.02	28.11.02	40
16	150	31.04.02	26.11.02	20
17	160	05.05.02	24.11.02	25
18	170	07.05.02	22.11.02	30
19	180	09.05.02	20.11.02	35
20	190	11.05.02	18.11.02	40
21	100	13.05.02	16.11.02	20
22	120	15.05.02	14.11.02	25
23	140	17.05.02	12.11.02	30
24	160	19.05.02	10.11.02	35
25	180	21.05.02	08.11.02	40

Задача 8

Вексель учтен в банке за t дней до срока оплаты по простой годовой учетной ставке d. Определить доходность этой операции по эквивалентной годовой ставке простых процентов при использовании банковского правила.

Задача 9

При выдаче кредитов банк использует простую годовую процентную ставку i. Определить эквивалентное значение простой годовой учетной ставки при учете векселя за t дней до погашения по банковскому правилу.

Таблица 9.7

Данные к задачам 8 и 9

Вариант	t, дней	d, %	i, %
1	60	30	55
2	65	28	50
3	70	26	45
4	75	24	40
5	80	22	35

Окончание табл. 9.7

Вариант	t, дней	d, %	i, %
6	85	20	30
7	90	18	25
8	95	16	20
9	100	22	55
10	110	20	50
11	120	18	45
12	130	16	40
13	140	14	35
14	150	12	30
15	160	10	25
16	170	20	50
17	180	19	48
18	190	18	46
19	200	17	44
20	210	16	42
21	220	15	40
22	230	14	38
23	240	13	36
24	250	12	34
25	260	11	32

Задача 10

Вексель учтен в банке за t дней до погашения по простой годовой учетной ставке d. Банк удерживает комиссионные в размере q процентов от номинальной стоимости векселя. Определить доходность сделки по эффективной ставке простых процентов, если расчеты выполняются с применением банковского правила.

Задача 11

Банк выдал кредит на k месяцев под простую процентную ставку i процентов годовых. Определить эффективную процентную ставку кредита, если банк удерживает комиссионные в размере q процентов от суммы кредита.

Таблица 9.8

Данные к задачам 10 и 11

Вариант	t, дней	d, %	q, %	k, мес.	i, %
1	200	10	0,5	2	60
2	190	11	1,0	3	55
3	180	12	1,5	4	50
4	170	13	0,6	5	45
5	160	14	1,0	6	40
6	150	15	1,4	7	35
7	140	16	0,7	8	30
8	130	17	1,0	9	25
9	120	18	1,3	10	20
10	110	19	0,8	3	50
11	100	20	1,0	4	45
12	90	21	1,2	5	40
13	80	22	0,5	6	35
14	70	23	1,0	7	30
15	60	24	1,5	8	25
16	50	25	0,6	9	20
17	60	30	1,0	4	40
18	70	28	1,4	5	38
19	80	24	0,8	6	36
20	90	22	1,0	7	34
21	100	20	1,2	5	30
22	110	18	1,4	6	28
23	120	16	1,5	7	26
24	130	14	1,6	8	24
25	140	12	1,8	9	22

Задача 12

Кредит выдан на k месяцев в размере P с условием возврата суммы S. Определить простую годовую процентную ставку кредита.

Задача 13

Определить период времени, за который начальный капитал P возрастет до суммы S, если применяется простая процентная ставка i процентов годовых. (Количество дней в году $K = 365$).

Таблица 9.9

Данные к задачам 12 и 13

Вариант	K, мес.	P, тыс. руб.	S, тыс. руб.	i, %
1	2	20	22	20
2	3	20	24	25
3	4	20	26	30
4	5	20	28	40
5	6	20	30	45
6	7	20	31	50
7	8	20	32	55
8	9	20	33	60
9	2	30	31	20
10	3	30	32	25
11	4	30	33	30
12	5	30	34	35
13	6	30	35	40
14	7	30	36	45
15	8	30	37	50
16	9	30	38	55
17	2	40	42	12
18	3	40	44	14
19	4	40	46	16
20	5	40	48	18
21	6	40	50	20
22	7	40	52	22
23	8	40	54	24
24	9	40	56	26
25	10	50	60	30

Задача 14

Определить наращенную сумму вклада и доход клиента при сроке вклада n лет по номинальной годовой процентной ставке j, если начисление процентов производится: а) раз в год; б) по полугодиям; в) поквартально; г) ежемесячно.

Задача 15

Определить эффективную процентную ставку, если номинальная процентная ставка равна j, а начисление процентов производится m раз в году.

Задача 16

Решить предыдущую задачу при условии, что проценты по вкладу облагаются q-процентным налогом, а срок сделки – n лет.

Задача 17

Номинальная процентная ставка банка равна j, начисление процентов m раз в году. На какой срок нужно поместить вклад в сумме P, чтобы получить наращенную сумму S?

Задача 18

Сумма P помещена на банковский депозит. Какой должна быть номинальная годовая процентная ставка при начислении процентов m раз в году, чтобы через n лет получить наращенную сумму S?

Задача 19

Банк начисляет проценты по вкладам ежемесячно по номинальной годовой ставке j с использованием французской практики. Определить сумму вклада, необходимую для накопления с момента времени ∂_1 до момента ∂_2 суммы S.

Таблица 9.10

Данные к задачам 14–19

№	P, т. р.	S, т. р.	j, %	m	n, лет	q, %	∂_1	∂_2
1	10	12	6	12	2	1,0	01.01.02	31.10.02
2	12	14	7	4	3	1,5	06.01.02	26.10.02
3	14	17	8	2	4	2,0	11.01.02	21.10.02
4	16	19	9	12	5	0,8	16.01.02	16.10.02
5	20	23	10	4	2	1,2	21.01.02	11.10.02
6	22	26	11	2	3	1,6	26.01.02	06.10.02
7	24	28	12	12	4	2,0	31.01.02	01.10.02
8	26	30	6	4	5	1,0	04.02.02	30.09.02
9	28	32	7	2	2	1,5	08.02.02	26.09.02
10	30	35	8	12	3	2,0	12.02.02	22.09.02
11	35	40	9	4	4	0,8	16.02.02	18.09.02
12	40	45	10	2	5	1,2	20.02.02	14.09.02
13	45	50	11	12	2	1,6	24.02.02	10.09.02
14	50	55	12	4	3	2,0	28.02.02	06.09.02
15	55	60	6	2	4	1,0	01.03.02	30.11.02
16	60	70	7	12	5	1,5	06.03.02	27.11.02
17	65	80	8	4	2	2,0	11.03.02	24.11.02
18	70	90	9	2	3	0,8	16.03.02	21.11.02
19	75	100	10	12	4	1,2	21.03.02	18.11.02
20	80	110	11	4	5	1,6	26.03.02	15.11.02
21	85	115	12	2	2	2,0	31.03.02	12.11.02
22	90	120	10	12	3	1,0	02.04.02	09.11.02
23	95	125	12	4	4	1,5	04.04.02	06.11.02
24	100	130	14	2	5	2,0	06.04.02	03.11.02
25	150	200	16	12	2	1,0	08.04.02	30.10.02

Задача 20

Вексель номинальной стоимостью S учтен в банке за k месяцев до погашения по сложной годовой учетной ставке f при ежемесячном дисконтировании. Определить текущую стоимость векселя и дисконт.

Задача 21

Вексель учтен в банке за t дней до погашения по цене P. Номинальная годовая учетная ставка банка равна f, дисконтирование m раз в год. Определить номинальную стоимость векселя при использовании банковского правила.

Задача 22

Определить номинальную учетную ставку, эквивалентную номинальной годовой процентной ставке j при дисконтировании m_d раз в год и начислении процентов m раз в год.

Таблица 9.11

Данные к задачам 20–22

№	S, тыс. руб.	P, тыс. руб.	f, %	m	k, мес.	t, дней	m_d
1	20	15	10	12	3	50	2
2	30	25	11	4	4	60	12
3	40	35	12	2	5	70	4
4	50	45	13	12	6	80	4
5	60	55	14	4	7	90	2
6	70	65	15	2	8	55	12
7	80	75	16	12	9	65	2
8	90	80	17	4	3	75	12
9	100	90	18	2	4	85	4
10	110	100	19	12	5	95	4
11	120	110	20	4	6	50	2
12	130	120	21	2	7	60	12
13	140	130	22	12	8	70	2
14	150	140	23	4	9	80	12
15	75	60	24	2	3	90	4
16	100	80	25	12	4	55	4
17	125	100	10	4	5	65	2
18	150	120	11	2	6	75	12
19	175	140	12	12	7	85	2
20	200	150	13	4	8	95	12
21	50	40	14	2	9	50	4
22	100	75	15	12	4	60	4

Окончание табл. 9.11

№	S, тыс. руб.	P, тыс. руб.	f, %	m	k, мес.	t, дней	m_d
23	150	125	16	4	6	70	2
24	200	150	17	2	8	80	12
25	250	200	18	12	10	90	2

Задача 23

Три векселя номинальными стоимостями S_1, S_2 и S_3 со сроками погашения соответственно t_1, t_2 и t_3 дней объединяются в один со сроком погашения t дней. Объединение производится по простой годовой процентной ставке i. Найти номинальную стоимость объединенного векселя, если расчет выполняется по банковскому правилу.

Задача 24

Три векселя номинальными стоимостями S_1, S_2 и S_3 со сроками погашения соответственно t_1, t_2 и t_3 дней объединяются в один номинальной стоимостью S. Объединение производится по сложной годовой процентной ставке i. Найти срок погашения объединенного векселя, если используется банковское правило.

Задача 25

Три векселя номинальными стоимостями S_1, S_2 и S_3 со сроками погашения соответственно t_1, t_2 и t_3 дней объединяются в один со сроком погашения t дней. Объединение производится по простой годовой процентной ставке i по банковской методике. Годовой уровень инфляции равен α. Определить номинальную стоимость объединенного векселя с учетом инфляции.

Таблица 9.12

Данные к задачам 23–25

№	S_1, тыс. руб.	S_2, тыс. руб.	S_3, тыс. руб.	t_1, дн.	t_2, дн.	t_3, дн.	i, %	S, тыс. руб.	t, дн.	α, %
1	10	15	20	20	51	110	10	40	70	10
2	20	25	30	22	52	115	12	70	80	11
3	30	35	40	24	53	120	14	120	90	12
4	40	45	50	26	54	125	16	130	70	13
5	50	55	60	28	55	130	18	170	80	14
6	60	65	70	30	56	110	20	200	90	15
7	70	75	80	32	57	115	22	220	70	16
8	80	85	90	34	58	120	24	270	80	17
9	90	95	80	36	59	125	10	250	90	18
10	15	10	20	38	60	130	12	50	70	19
11	25	20	30	40	51	100	14	70	80	20
12	35	30	40	20	52	105	16	100	90	21
13	45	40	50	22	53	110	18	150	70	22
14	55	50	60	24	54	115	20	150	80	23
15	65	60	70	26	55	120	22	200	90	24
16	75	70	60	28	56	125	24	200	70	25
17	85	80	70	30	57	130	10	250	80	12
18	95	90	80	32	58	100	12	250	90	14
19	5	15	10	34	59	105	14	35	70	16
20	20	35	30	36	60	110	16	80	80	18
21	15	20	25	38	60	115	18	65	90	20
22	20	30	40	40	70	120	20	80	100	22
23	25	15	20	20	55	125	22	70	90	24
24	30	20	25	25	60	130	24	70	100	26
25	35	45	55	30	70	100	20	140	90	28

Задача 26

Вкладчик в конце каждого месяца кладет в банк сумму R. Проценты начисляются m раз в год по номинальной годовой ставке j. Определить сумму на счете через n лет.

Задача 27

Найти текущее значение ренты постнумерандо с выплатами R. Выплаты производятся p раз в год. Проценты начисляются m раз в год по номинальной годовой процентной ставке j. Срок ренты – n лет.

Задача 28

Кредит в размере P, выданный под j процентов годовых при начислении процентов m раз в год, погашается равными выплатами в конце каждого из p периодов в году. Найти размер выплат, необходимый для погашения кредита за n лет.

Таблица 9.13

Данные к задачам 26–28

№	P , тыс. руб.	R, тыс. руб.	j, %	m	p	n, лет
1	100	1,0	3	4	2	5,0
2	110	1,5	6	2	4	4,5
3	120	2,0	12	4	2	4,0
4	130	2,5	3	2	4	3,5
5	140	3,0	6	4	2	3,0
6	150	3,5	12	2	4	2,5
7	160	4,0	3	4	2	2,0
8	170	4,5	6	2	4	5,0
9	180	5,0	12	4	2	4,5
10	190	1,0	3	2	4	4,0
11	200	1,5	6	4	2	3,5
12	210	2,0	12	2	4	3,0
13	220	2,5	3	4	2	2,5
14	230	3,0	6	2	4	2,0
15	240	3,5	12	4	2	5,0
16	250	4,0	3	2	4	4,5
17	260	4,5	6	4	2	4,0
18	270	5,0	12	2	4	3,5
19	280	1,0	3	4	2	3,0
20	290	1,5	6	2	4	2,5
21	300	2,0	12	4	2	2,0
22	310	2,5	3	2	4	5,0

Окончание табл. 9.13

№	P , тыс. руб.	R, тыс. руб.	j, %	m	p	n, лет
23	320	3,0	6	4	2	4,5
24	330	3,5	12	2	4	4,0
25	340	4,0	3	4	2	3,5

Задача 29

Облигация номинальной стоимостью S приобретена по курсу p_k. Срок погашения n лет. Проценты выплачиваются в конце срока по сложной годовой процентной ставке i. Определить доход от облигации и доходность по эффективной ставке сложных процентов.

Задача 30

Облигация номинальной стоимостью S приобретена по курсу p_k. Срок погашения облигации n лет. Проценты по облигации выплачиваются k раз в год по номинальной годовой процентной ставке q. Полученные по купонам деньги могут реинвестироваться по номинальной годовой ставке j с начислением процентов m раз в год. Определить доход и доходность покупки облигации: а) без реинвестирования; б) с реинвестированием.

Таблица 9.14

Данные к задачам 29 и 30

№	S, тыс. руб.	p_k	i, %	q, %	k	j, %	m	n, лет
1	100	95	10	6	4	4	12	1,5
2	200	90	12	8	2	5	4	2,0
3	300	85	14	10	4	6	2	2,5
4	400	95	16	12	2	7	12	3,0
5	500	90	18	6	4	8	4	3,5
6	100	85	10	8	2	9	2	1,5
7	200	95	12	10	4	10	12	2,0
8	300	90	14	12	2	4	4	2,5
9	400	85	16	6	4	5	2	3,0
10	500	95	18	8	2	6	12	3,5

Окончание табл. 9.14

№	S, тыс. руб.	p_k	i, %	q, %	k	j, %	m	n, лет
11	100	90	10	10	4	7	4	1,5
12	200	85	12	12	2	8	2	2,0
13	300	95	14	6	4	9	12	2,5
14	400	90	16	8	2	10	4	3,0
15	500	85	18	10	4	4	2	3,5
16	100	95	10	12	2	5	12	1,5
17	200	90	12	6	4	6	4	2,0
18	300	85	14	8	2	7	2	2,5
19	400	95	16	10	4	8	12	3,0
20	500	90	18	12	2	9	4	3,5
21	100	85	10	6	4	10	2	1,5
22	200	95	12	8	2	4	12	2,0
23	300	90	14	10	4	5	4	2,5
24	400	85	16	12	2	6	2	3,0
25	500	95	18	6	4	7	12	3,5

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капельян С.Н. Основы коммерческих и финансовых расчетов / С.Н. Капельян, О.А. Левкович. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999.
2. Касимова О.Ю. Введение в финансовую математику (анализ кредитных и инвестиционных операций). – М.: Анкил, 2000.
3. Ковалев В.В. Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – М.: Финансы и статистика, 1999.
4. Фомин Г.П. Финансовая математика: 300 примеров и задач: Учебное пособие. – М.: Гном-Пресс, 2000.
5. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник – М.: Дело, 2000.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порядковые номера дней года

Дни	Месяцы					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	32	60	91	121	152
2	2	33	61	92	122	153
3	3	34	62	93	123	154
4	4	35	63	94	124	155
5	5	36	64	95	125	156
6	6	37	65	96	126	157
7	7	38	66	97	127	158
8	8	39	67	98	128	159
9	9	40	68	99	129	160
10	10	41	69	100	130	161
11	11	42	70	101	131	162
12	12	43	71	102	132	163
13	13	44	72	103	133	164
14	14	45	73	104	134	1654
15	15	46	74	105	135	166
16	16	47	75	106	136	167
17	17	48	76	107	137	168
18	18	49	77	108	138	169
19	19	50	78	109	139	170
20	20	51	79	110	140	171
21	21	52	80	111	141	172
22	22	53	81	112	142	173
23	23	54	82	113	143	174
24	24	55	83	114	144	175
25	25	56	84	115	145	176
26	26	57	85	116	146	177
27	27	58	86	117	147	178
28	28	59	87	118	148	179
29	29		88	119	149	180
30	30		89	120	150	181
31	31		90		151	

Порядковые номера дней года (окончание)

Дни	Месяцы					
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	182	213	244	274	305	335
2	183	214	245	275	306	336
3	184	215	246	276	307	337
4	185	216	247	277	308	338
5	186	217	248	278	309	339
6	187	218	249	279	310	340
7	188	219	250	280	311	341
8	189	220	251	281	312	342
9	190	221	252	282	313	343
10	191	222	253	283	314	344
11	192	223	254	284	315	345
12	193	224	255	285	316	346
13	194	225	256	286	317	347
14	195	226	257	287	318	348
15	196	227	258	288	319	349
16	197	228	259	289	320	350
17	198	229	260	290	321	351
18	199	230	261	291	322	352
19	200	231	262	292	323	353
20	201	232	263	293	324	354
21	202	233	264	294	325	355
22	203	234	265	295	326	356
23	204	235	266	296	327	357
24	205	236	267	297	328	358
25	206	237	268	298	329	359
26	207	238	269	299	330	360
27	208	239	270	300	331	361
28	209	240	271	301	332	362
29	210	241	272	302	333	363
30	211	242	273	303	334	364
31	212	243		304		365