Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания
для студентов заочного факультета

Составители М.В. Зголич,
Л.А. Валуйская

Томск 2013

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии/ Сост. М.В. Зголич, Л.А. Валуйская. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 30 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор Е.Ю. Глотова

Методические указания к контрольной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии» студентами первого курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений и профилей.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № от октября 2012 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо.

с 1.09. 201
до 1.09.201

Оригинал-макет подготовлен М.В. Зголич.

Подписано в печать . .12.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,69. Тираж 100 экз. Заказ № .

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания разработаны для студентов заочного факультета ТГАСУ. Рекомендуются для самостоятельной работы студентов в процессе выполнения контрольных работ при изучении темы "Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии". Математическое содержание раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения.
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности.
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач.

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	Основные понятия, методы и задачи векторной алгебры и аналитической геометрии.
Уметь:	Использовать математические методы в технических приложениях.
Владеть:	Методами математического анализа.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2: ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Основные понятия

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА, ЕГО ДЛИНЫ

1.1. *Вектор* – это направленный отрезок (или, другими словами, упорядоченная пара точек).

Для вектора принято обозначение $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало, точка B – конец вектора.

1.2. *Длиной (модулем) вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между началом вектора и его концом. Обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

1.3. Вектор, у которого совпадают начало и конец, называют *нулевым вектором* и обозначают $\vec{0}$.

2. КОЛЛИНЕАРНЫЕ И КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

2.1. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Коллинеарность векторов принято обозначать $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Если хотят подчеркнуть сонаправленность коллинеарных векторов, пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, если же коллинеарные векторы противоположно ориентированы, принята запись $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$. Нулевой вектор принято считать коллинеарным любому вектору.

2.2. Совокупность трех и более векторов, лежащих в одной плоскости или параллельных одной плоскости, называют *компланарной.*

Например, на рис. 1 тройки векторов $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BB_1}$ являются компланарными, тройка $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ – не компланарна. А векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ – коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ – коллинеарны, причем, $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1D_1}$.

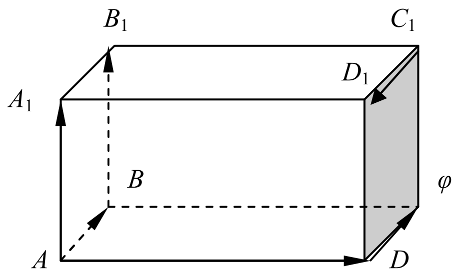

Рис. 1

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

3.1. *Суммой векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется вектор, который находится либо по правилу параллелограмма (рис. 2), либо по правилу треугольника (рис. 3). В первом случае для нахождения суммы оба вектора откладываются от одной точки, на этих векторах строится параллелограмм. Тогда сумма данных векторов есть вектор, начало которого совпадает с началами обоих векторов-слагаемых и направленный по диагонали параллелограмма (рис. 2). Чтобы найти сумму двух векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ по правилу треугольника, нужно расположить векторы последовательно (от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}$). Тогда их сумма – это вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора (вектора $\bar{a}$), а конец совпадает с концом второго вектора (вектора $\bar{b}$)(рис. 3).

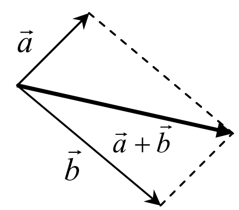

Рис. 2

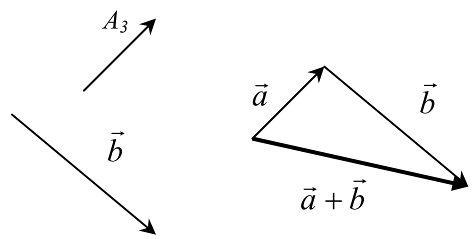

Рис. 3

3.2. *Сумму любого числа векторов* находят по правилу многоугольника (рис. 4).

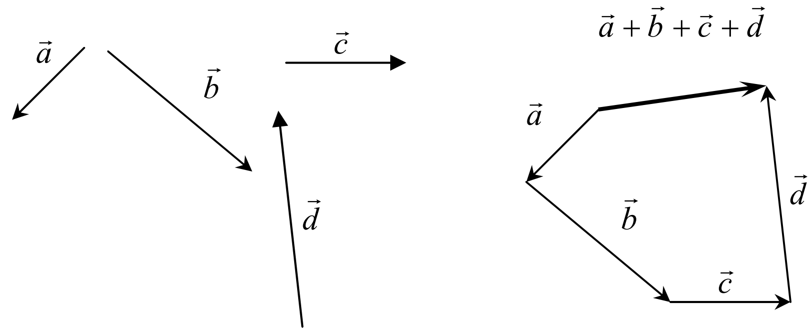

Рис. 4

По правилу многоугольника путем параллельного переноса начало каждого последующего вектора помещают в конец предыдущего. Вектор $S = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ получен путем соединения начала первого вектора и конца последнего вектора.

3.3. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha > 0$;

   $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha < 0$.
2. $\left|\vec{b}\right| = |\alpha|\cdot|\vec{a}|$.
3. $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

При этом принята запись $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

На рис.5 изображены векторы $\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}, -2\vec{a}$.

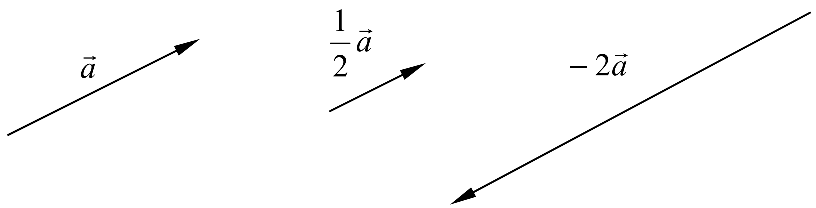

Рис. 5

4. БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

4.1. *Базисом на плоскости* называют пару ненулевых неколлинеарных векторов.

4.2. *Разложить* вектор $\vec{c}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – значит представить вектор $\vec{c}$ в виде

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

где α,β – некоторые числа, которые называются *координатами* вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.3. Два вектора коллинеарны, если их координаты пропорциональны.

Например, в пространстве векторы $\vec{a} = \{1,2,-3\}$ и $\vec{b} = \{-2,-4,6\}$ – коллинеарны, так как $\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \lambda$, где $\lambda = -\frac{1}{2}$. Векторы $\vec{c} = \{3,-5\}$ и $\vec{d} = \{6,7\}$ на плоскости не коллинеарны, так как $\frac{3}{6} \neq \frac{-5}{7}$, а значит, они образуют базис.

4.4. Если известны координаты начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то его координаты находятся по формуле

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

4.5. Если вектор $\vec{a} = \{x; y\}$ на плоскости задан своими координатами, то его длина находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В пространстве длина вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

5.1. *Скалярным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Для скалярного произведения принято обозначение $(\overline{a},\overline{b})$.

Таким образом, по определению

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нулевой, скалярное произведение полагается равным нулю.

5.2. Зная координаты векторов $\vec{a}=\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2; y_2; z_2\}$, можно найти их скалярное произведение по формуле

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,.$$

5.3. С помощью скалярного произведения можно вычислить *угол* φ *между векторами* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}\,.$$

Или в координатах

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,.$$

5.4. Из 5.3 следует *условие перпендикулярности* ненулевых векторов:

$$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow(\overline{a},\overline{b})=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\,.$$

6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

6.1. *Векторным произведением* двух неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$;

2) вектор $\overline{c}$ ориентирован так, что тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образует правую тройку векторов;

3) $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Для векторного произведения принято обозначение $\overline{c}=[\overline{a},\overline{b}]$

6.2. Из определения получаем *условие коллинеарности* двух векторов: два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (угол φ между ними равен 0 или 180^0, значит $\sin\varphi=0$) тогда и только тогда, когда их векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$ равно нулю.

6.3. В декартовых координатах векторное произведение векторов $\vec{a}=\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2; y_2; z_2\}$ представляется в виде определителя третьего порядка

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты декартова базиса (единичные взаимно перпендикулярные векторы, образующие правую тройку).

6.4. *Геометрический смысл* векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заключается в том, что модуль векторного произведения данных векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т.е.

$$S_{\text{пар-ма}}=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

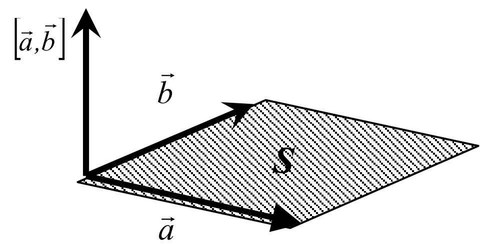

Рис. 6

7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

7.1. *Смешанным произведением трех векторов* называется скалярное произведение (т.е. число) векторного произведения двух первых векторов на третий вектор.

Для смешанного произведения принято обозначение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Таким образом, по определению

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}).$$

7.2. Смешанное произведение трех векторов, взятое по модулю, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$V_{\text{пар-да}} = \left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|$$

7.3. *Условие компланарности трех векторов:* смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ равно 0 тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

7.4. Если известны координаты векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

8. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

8.1. *Уравнение прямой* можно записать, если:

1) на прямой известна точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\bar{n} = (A,B)$, перпендикулярный этой прямой (вектор $\bar{n} = (A,B)$ называют *нормальным вектором* прямой) (рис. 7а)

2) на прямой известна точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\bar{S} = (m,n)$, параллельный этой прямой (вектор $\bar{S}$ называется *направляющим вектором* прямой), (рис. 7б).

а) б)

Рис. 7

8.2. *Как получить уравнение прямой в том и другом случаях?*

а) Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\bar{n} = (A,B)$. Получим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\bar{n}$. Для этого возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ (рис. 8а)

а) б)

Рис. 8

Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, т.е., $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$, то их скалярное произведение равно нулю: $\left(\vec{n},\overline{M_0M}\right)=0$. А так как $\overline{n}=(A,B)$, $\overline{M_0M}=\{x-x_0\,;\,y-y_0\}$, то в координатах получаем

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $C=-Ax_0-By_0$, получаем *общее уравнение прямой на плоскости*

$$Ax+By+C=0.$$

б) Пусть теперь задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и известен вектор $\overline{S}=(m,n)$. Получим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}=(m,n)$. Для этого возьмем на прямой произвольную точку $M(x,y)$ (рис.8б).

По условию коллинеарности векторов (см. свойство 4.3) $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ и $\overline{S}=(m,n)$ получаем ***каноническое уравнение прямой на плоскости***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ тогда также известен направляющий вектор $\overline{S}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1)$ (рис. 9) прямой и каноническое уравнение примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки.

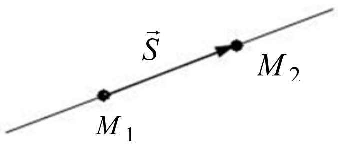

Рис. 9

9. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

9.1. *Уравнение плоскости* можно получить в каждом из следующих двух случаев:

1) Если на плоскости в заданной системе координат известна точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и известен нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)$ этой плоскости (т.е. вектор, перпендикулярный плоскости).

2) Если на плоскости известна точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и известны два неколлинеарных между собой вектора, параллельных данной плоскости.

Как получить уравнение плоскости в том и другом случаях?

1) Пусть дана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)$. Требуется получить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B,C)$ (рис. 10).

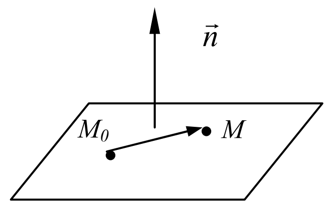

Рис. 10

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости. По условию перпендикулярности $\overline{n}\perp\overrightarrow{M_0M}\Rightarrow(\overline{n},\overrightarrow{M_0M})=0$.

Переходя к координатам векторов, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Введем обозначение $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, тогда уравнение плоскости примет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Это уравнение называют *общим уравнением плоскости*. Заметим, что в этом уравнении коэффициенты A, B, C – координаты нормального вектора плоскости.

2) Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\overline{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Требуется получить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ (рис. 11).

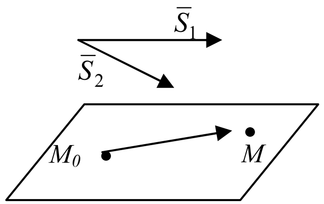

Рис. 11

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. По условию задачи векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overline{S}_1, \overline{S}_2) = 0 .$$

Переходя к координатам векторов, получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется вектором и длиной (модулем) вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными и компланарными?
3. Что называется суммой векторов? Каковы способы нахождения суммы двух и большего числа векторов?
4. Что называется произведением вектора на число?
5. Что называется базисом на плоскости?
6. Что значит «разложить вектор по базису»? Что называется координатами вектора в данном базисе?
7. В каком случае векторы являются коллинеарными?
8. Как выражаются координаты вектора через координаты начала и конца вектора?
9. Как вычисляется длина вектора?
10. Что называется скалярным произведением двух векторов, как оно выражается через координаты векторов?
11. Как вычисляется угол между двумя векторами?
12. Каково условие перпендикулярности векторов?
13. Что называется векторным произведением двух векторов и как оно выражается через координаты векторов?
14. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов?
15. В чем заключается геометрический смысл векторного произведения?
16. Что называется смешанным произведением трех векторов, каков его геометрический смысл и как оно выражается через координаты векторов?
17. Сформулируйте условие компланарности трех векторов?
18. Что называется нормальным и направляющим векторами прямой на плоскости?
19. Как записать уравнение прямой на плоскости, если известен ее нормальный (направляющий) вектор?

20. Как записать уравнение прямой, проходящей через две точки?

21. Как записывается уравнение плоскости, если известна точка, через которую она проходит, и нормальный вектор?

22. Как записывается уравнение плоскости, если известна точка, через которую она проходит, и два неколлинеарных вектора, параллельных ей?

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. *Даны векторы* $\vec{a} = \{1;-2\}, \vec{b} = \{-3;4\}, \vec{c} = \{-7;8\}$. *Показать, что векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *образуют базис. Разложить вектор* $\vec{c}$ *по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Решение.

Покажем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Действительно, так как они ненулевые и неколлинеарные, поскольку $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{4}$, то согласно пункту 4.1 векторы образуют базис.

Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. То есть представим вектор $\vec{c}$ в виде

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

и найдем координаты вектора $\vec{c}$ (числа α и β).

Записав это равенство в координатах, т.е. подставив в него координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов α и β:

$$\alpha - 3\beta = -7,$$

$$-2\alpha + 4\beta = 8.$$

Решая полученную систему одним из известных методов, получаем $\alpha = 2, \beta = 3$.

Значит, вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим образом: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. *Ответ:* $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

Задача 2. *Даны точки* $A_1(-4, 2)$, $A_2(2, -3)$, $A_3(-10, 5)$. *Найти: 1) длину вектора* $\overline{A_1A_2}$; *2) угол между векторами* $\overline{A_1A_2}$ *и* $\overline{A_1A_3}$.

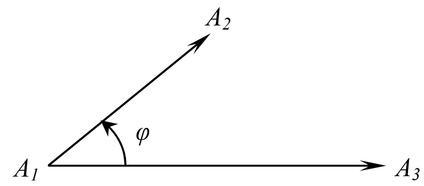

Рис.12

Решение.

1. Чтобы найти длину (модуль) вектора $\overline{A_1A_2}$. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$ согласно пункту 4.4: $\overline{A_1A_2} = \{2-(-4);-3-2\} = \{6;-5\}$. Теперь, следуя указанию 4.5, вычислим длину вектора $\overline{A_1A_2}$:

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}.$$

2. Угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ (п.5.3) найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_3}\right|}.$$

Для этого найдем сначала координаты вектора $\overline{A_1A_3}$

$$\overline{A_1A_3} = \{-10-(-4);5-2\} = \{-6;3\},$$

а затем вычислим скалярное произведение

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right) = 6\cdot(-6)+(-5)\cdot 3 = 51.$$

Найдем также длину вектора $\overline{AD}$ (п. 4.5):

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-6)^2+3^2} = \sqrt{45}.$$

Подставляя найденные величины в формулу для нахождения косинуса угла, получаем

$$\cos\varphi = \frac{51}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{45}} = \frac{51}{\sqrt{61}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{305}}.$$

Задача 3. *Даны вершины пирамиды A (–4, 2, 6), B(2, –3, 0), C (–10, 5, 8) и D (–5, 2, –4). Найти: 1) площадь грани ABC; 2) объем пирамиды.*

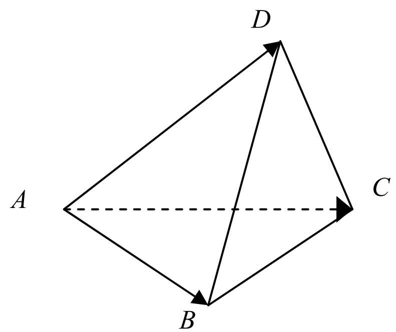

Рис. 13

Решение.

1. Чтобы найти площадь грани ABC, воспользуемся формулой

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Координаты вектора $\overline{AB}$ мы уже. Найдем координаты вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = \{-10-(-4);5-2;8-6\} = \{-6;3;2\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле из пункта 6.3:

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 24\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Найдем теперь модуль векторного произведения (п.4.5)

$$\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \sqrt{8^2+24^2+(-12)^2} = \sqrt{64+576+144} = \sqrt{784} = 28.$$

Отсюда получаем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14 \text{ кв.ед.}$$

2. Из школьного курса известно, что объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c},$ равен $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах. Таким образом,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|.$$

И мы получаем $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 112$. Искомый

объем равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3} \text{ куб.ед.}$$

Задача 4. *Заданы вершины треугольника A (3, 4), B (5, –2) и C (–4, 6) Требуется составить уравнения:*

1) стороны AB;

2) высоты BP, проведенной из вершины B.

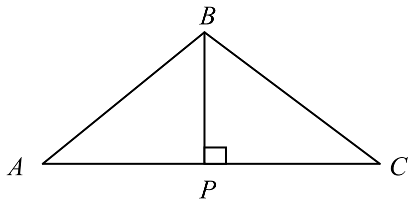

Рис. 14

Решение.

1. Чтобы получить уравнение стороны AB, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Уравнение прямой AB примет вид:

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{-2-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-6}.$$

Полученное каноническое уравнение простым преобразованием приведем к виду

$$3x + y - 13 = 0.$$

Это общее уравнение прямой AB.

3. Чтобы получить уравнение высоты BP, воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{AC}$ является нормальным вектором прямой BP. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка этой прямой. $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BM}) = 0$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overline{BM}$: $\overrightarrow{AC} = \{-7, 2\}$, $\overline{BM} = \{x-5; y+2\}$. Тогда получим

$$-7(x-5) + 2(y+2) = 0.$$

Отсюда окончательно общее уравнение искомой прямой BP имеет вид:

$$7x - 2y - 39 = 0.$$

Задача 5. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_1(-1{,}0{,}1)$, *и параллельной плоскости* $4x - 2y + z + 6 = 0$.

Решение.

Из общего уравнения плоскости $4x - 2y + z + 6 = 0$ находим координаты ее нормального вектора $\vec{n} = \{4; -2; 1\}$. Так как по условию данная плоскость параллельна искомой плоскости, то ее нормальный вектор перпендикулярен искомой плоскости (рис. 14).

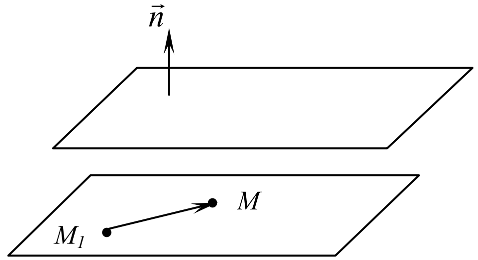

Рис. 15

Таким образом, получаем первый случай из рассмотренных выше (п. 9.2). Векторы $\overline{M_1M}, \vec{n}$ перпендикулярны, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{n}, \overline{M_1M}\right) = 0.$$

Имея координаты этих векторов: $\overline{M_1M} = \{x+1, y, z-1\}$, $\vec{n} = \{4; -2; 1\}$, получаем

$$4(x+1) + (-2)y + 1(z-1) = 0.$$

Упростив это уравнение, получаем общее уравнение искомой плоскости:

$$4x - 2y + z + 3 = 0.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент должен выполнять контрольное задание по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a} = \{4, -2\}, \vec{b} = \{3, 5\}, \vec{c} = \{1, -7\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(4,2)$, $A_2(0,7)$, $A_3(0,2)$ Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4,2,5)$, $A_2(0,7,2)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,0)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-8;-2)$, $B(2;10)$, $C(4;4)$. Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,1,0)$ и параллельной плоскости $3x + 2y + z + 2 = 0$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a} = \{3, -2\}, \vec{b} = \{-2, 1\}, \vec{c} = \{7, -4\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(4,4)$, $A_2(4,6)$, $A_3(2,8)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4,4,10)$, $A_2(4,6,2)$, $A_3(2,8,4)$, $A_4(9,6,9)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-5;-2)$, $B(7;6)$, $C(5;-4)$. Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1,2,1)$ и параллельной плоскости $x - 2y + z + 3 = 0$.

Вариант 3

1. Даны векторы $\vec{a} = \{3, 5\}, \vec{b} = \{1, -7\}, \vec{c} = \{7, 3\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(4,6)$, $A_2(6,9)$, $A_3(2,10)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$, $A_4(7,5,9)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(4;8)$, $B(2;-10)$, $C(-6;-2)$. Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,1,-1)$ и параллельной плоскости $2x-y+2z+3=0$.

Вариант 4

1. Даны векторы $\vec{a}=\{3,1\}, \vec{b}=\{2,-1\}, \vec{c}=\{8,1\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(3,5)$, $A_2(8,7)$, $A_3(5,10)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4,2,5)$, $A_2(0,7,2)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,0)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-6;-2)$, $B(4;8)$, $C(2;-8)$.

Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3,1,1)$ и параллельной плоскости $3x+2y-z+1=0$.

Вариант 5

1. Даны векторы $\vec{a}=\{3,1\}, \vec{b}=\{2,-1\}, \vec{c}=\{5,5\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(10,6)$, $A_2(-2,8)$, $A_3(6,8)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(10,6,6)$, $A_2(-2,8,2)$, $A_3(6,8,9)$, $A_4(7,10,3)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(2;6)$, $B(4;-2)$, $C(-2;-6)$. Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,-1,-1)$ и параллельной плоскости $2x+y-z+2=0$.

Вариант 6

1. Даны векторы $\vec{a}=\{3,1\}, \vec{b}=\{2,-1\}, \vec{c}=\{1,-3\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(1,8)$, $A_2(5,2)$, $A_3(5,7)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,8,2)$, $A_2(5,2,6)$, $A_3(5,7,4)$, $A_4(4,10,9)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-7;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;-5)$. Найти

а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1,1,1)$ и параллельной плоскости $x-2y+z+3=0$.

Вариант 7

1. Даны векторы $\vec{a}=\{4,-2\}, \vec{b}=\{3,5\}, \vec{c}=\{5,-9\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(6,6)$, $A_2(4,9)$, $A_3(4,6)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$;
2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(6,6,5)$, $A_2(4,9,5)$, $A_3(4,6,11)$, $A_4(6,9,3)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-2;-2)$, $B(7;-6)$, $C(1;2)$. Найти

а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,1,1)$ и параллельной плоскости $2x-y-2z+1=0$.

Вариант 8

1. Даны векторы $\vec{a}=\{2,1\}, \vec{b}=\{-1,2\}, \vec{c}=\{1,8\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(7,2)$, $A_2(5,7)$, $A_3(5,3)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$;
2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(7,2,2)$, $A_2(5,7,7)$, $A_3(5,3,1)$, $A_4(2,3,7)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-5;3)$, $B(3;4)$, $C(7;-3)$. Найти

а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты, проведенной из вершины A;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0,1,0)$ и параллельной плоскости $x-2y+z+3=0$.

Вариант 9

1. Даны векторы $\vec{a}=\{2,1\}, \vec{b}=\{-1,2\}, \vec{c}=\{12,1\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(8,6)$, $A_2(10,5)$, $A_3(5,6)$, $A_4(8,10)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$;
2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(8,6,4)$, $A_2(10,5,5)$, $A_3(5,6,8)$, $A_4(8,10,7)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(-2;0)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$. Найти

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины А;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,-1,-1)$ и параллельной плоскости $3x+2y-z+1=0$.

Вариант 10

1. Даны векторы $\vec{a}=\{5,2\}, \vec{b}=\{3,-4\}, \vec{c}=\{4,12\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны координаты точек $A_1A_2A_3$: $A_1(7,7), A_2(6,5), A_3(3,5)$. Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(7,7,3), A_2(6,5,8), A_3(3,5,8), A_4(8,4,1)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды;

4. Даны вершины треугольника $A(0;0), B(1;6), C(4;2)$. Найти

а) уравнение стороны АВ;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины А;

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1,1,2)$ и параллельной плоскости $x-2y+z+3=0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /Д.В. Беклемешев. – М.: Наука, 1980 – 1987. – С. 142 – 231.
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980. – С. 35 – 83.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980 – 1999. – Ч. 1. С. 76 – 148.
4. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1975. Гл.1 – с. 9–22, гл. 2 – 24–39, гл. 4 – с. 59–73, гл. 5 – с. 87–118, гл. 7 – с. 143–156, гл. 8 – с. 157–171, гл.9 – с. 172–178, гл. 10 – с. 179–195, гл.12 – с. 204–227.

СОДЕРЖАНИЕ