Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный архитектурно-строительный университет

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ.

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Составитель –Т.С. Куницына.

Томск – 2014

Элементы линейной и векторной алгебры: методические указания /Сост. Т.С. Куницына. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.- строит. ун-та, 2014. – 47 с.

Рецензент к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики
О.В. Иванова
Редактор к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики
Г.Д. Садритдинова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2. Б. 1 – «Математика» при изучении темы «Элементы линейной и векторной алгебры», студентами первого курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений подготовки специалистов и бакалавров. Содержат теоретические сведения, решения типовых задач, а также варианты контрольных заданий.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол №7 от 24 апреля 2014 г.

Срок действия с 01.09.2015
до 01 .09.2020

Оригинал – макет подготовлен Т.С. Куницыной.

Подписано в печать 14.10.2014. Формат 60х84/16
Бумага офсет. Гарнитура Таймс, печать офсет.
Уч.-изд. л. 1. Тираж 30. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнение контрольной работы по теме «Элементы линейной и векторной алгебры»

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения.
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических наук в профессиональной деятельности.
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики при решении профессиональных задач.

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	основные понятия линейной и векторной алгебры
Уметь:	выполнять действия с матрицами и векторами. Вычислять определители, решать системы линейных уравнений.
Владеть:	навыками использования методов линейной и векторной алгебры для решения практических задач.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

1.1 Матрицы и действия над ними

Числовой матрицей размерности $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

здесь m – число строк, n – число столбцов.

Матрица размерности $(n \times n)$ называется квадратной матрицей порядка n.

Примеры:

а) матрица размерности 2 х 3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

б) матрица второго порядка

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix};$$

в) матрица третьего порядка

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

г) верхняя и нижняя треугольная матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

д) диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

г) единичная матрица третьего порядка $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Числа a_{ij}, из которых составлена матрица, называются элементами матрицы. Число i обозначает номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых в матрице А расположен элемент a_{ij}. Элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ называются главными диагональными элементами.

Матрица А размерности $(m \times n)$ обозначается через $A_{m \times n}=(a_{ij})$.

Операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами называется транспонированием. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице А, принято обозначать A^T.

К операциям над матрицами относятся:

- ***сложение (вычитание) матриц,***

  Складывать (вычитать) можно лишь те матрицы, размерности которых совпадают. Для того чтобы сложить (вычесть) две матрицы, надо сложить (вычесть) их соответствующие элементы, то есть элементы, стоящие на одних и тех же местах.

  Если $A_{m \times n}=(a_{ij})$, $B_{m \times n}=(b_{ij})$, то матрица С=А+В такая что, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

- ***умножение матрицы на число,***

  Для того чтобы умножить матрицу на отличное от нуля число, надо все элементы матрицы умножить на это число.

  $\lambda A_{m \times n}=(\lambda a_{ij})$.

- ***умножение матрицы на матрицу.***

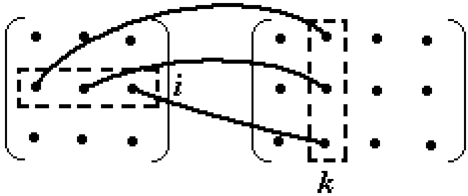
  Матрицу А можно умножить на матрицу В, если число элементов в строке матрицы А равно числу элементов в столбце матрицы В. Если $(m \times n)$ – размерность матрицы А,

$(n\times p)$–размерность матрицы B, то матрицу A можно умножить на матрицу B; при этом получится матрица C=AB размерности $(m\times p)$. Формально:

$$(m\times \boxed{n)(n}\times p)=(m\times p)$$

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что

$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$, где $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$. Приведем схему получения элемента c_{ik}.



В общем случае $AB\neq BA$; (даже если обе операции допустимы). Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют условию AB=BA, то они называются перестановочными

1.2. Определители. Свойства.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется число $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$

$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$. (*правило треугольников*).

Определитель матрицы A порядка n обозначается также через det A или |A|.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель порядка (n–1), полученный из элементов матрицы A после вычеркивания из нее строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит в матрице A элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} порядка n называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$.

Например, определитель третьего порядка можно вычислить разложением по элементам первой строки:

$$\Delta = \boldsymbol{a_{11}}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \boldsymbol{a_{12}}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \boldsymbol{a_{13}}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Следствие. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали, т.е. $\det A = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{kk}$.

Свойства определителей.

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. При перемене местами двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) умножить на отличное от нуля число, определитель умножится на это число.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из них элементами соответствующего столбца (строки) являются первые слагаемые, у другого – вторые. Остальные элементы у этих двух определителей те же, что и у данного.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Определитель, имеющий нулевую строку (или столбец), равен нулю.

Свойство 6. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (или строки), равен нулю.

Свойство 7. Определитель, у которого элементы двух строк (или столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{11} & \kappa a_{12} & \kappa a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо его столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{31} & a_{12}+\lambda a_{32} & a_{13}+\lambda a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Числа a_{ik} называются коэффициентами при неизвестных этой системы, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – свободными членами.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей системы.

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы отличен от нуля. Неизвестные x_j находятся по формулам Крамера

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

где D–определитель основной матрицы системы, а D_j–определитель, который получается из определителя основной матрицы системы заменой *j*-го столбца столбцом свободных членов.

1.4. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.

Матрица A^{-1} называется обратной для невырожденной матрицы A, если выполняются условия:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E,$$

где E – единичная матрица.

Теорема (условие существования обратной матрицы): Квадратная матрица A имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда эта матрица A является невырожденной. Если обратная матрица существует, то она является единственной.

Для этого, чтобы найти обратную матрицу необходимо:

1. Вычислить det A. Если det A $\neq$ 0, то матрица A^{-1} существует.

2. Составить союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\ldots A_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ A_{n1} & A_{n2}\ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Транспонируя матрицу A^*, получить матрицу $(A^*)^T$, которую называют присоединенной матрицей и обозначают через $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\ldots A_{n2} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n} & A_{2n}\ldots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Матрицу $\widetilde{A}$ умножить на число $\dfrac{1}{\det A}=\dfrac{1}{\Delta}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \ldots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \ldots \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \ldots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

5. Сделать проверку: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Матричный метод решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

где A - основная матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных, B–матрица-столбец свободных членов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, следовательно эти матрицы можно перемножать. По правилу умножения матриц AX=B. Полученное матричное уравнение равносильно системе (*).

Таким образом решение системы (*) сводится к решению матричного уравнения AX=B.

Если det A≠0, существует A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения слева на матрицу A^{-1} и воспользуемся свойствами операции умножения матриц:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad EX = A^{-1}B$$

Так как $EX = X$, окончательно будем иметь $\boxed{X = A^{-1}B}$

Таким образом, если det A≠0, уравнение AX=B (следовательно и система (*)) имеет единственное решение, которое находится по формуле $X = A^{-1}B$. Решение единственное в силу единственности матрицы A^{-1}.

1.5. Ранг матрицы.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Ранг матрицы A обозначается через r = ranq A.

Базисным минором матрицы A называют любой отличный от нуля минор этой матрицы, порядок которого равен рангу матрицы A.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице

Методы вычисления ранга матрицы.

Первый метод – *метод окаймляющих миноров* – основан на определении ранга матрицы.

Суть второго метода – *метода элементарных преобразований* – состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к треугольному виду. Число ненулевых строк треугольной матрицы равно ее рангу. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Под элементарными преобразованиями матрицы понимают:

1) транспонирование матрицы,
2) перестановку двух строк (столбцов),
3) вычеркивание нулевой строки (столбца),

4) умножение какой-либо строки (столбца) на ненулевое число;

5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Пример. *Вычислить ранг матрицы* А.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 8\end{pmatrix}$$. Воспользуемся методом элементарных преобразований. Чтобы привести матрицу к треугольному виду необходимо получить под главной диагональю нули. Сначала получим нули в первом столбце, т.е. в первом столбце элементы a_{21} и a_{31} обратим в нули. Для этого элементы первой строки мысленно умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки. Первая строка при этом не изменится.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4+2(-2) & -1+(-1)(-2) & 5+3(-2) & 1+(-2)(-2)\\ 2 & 1 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 8\end{pmatrix}$$. Затем элементы первой строки мысленно умножим на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третей строки. Первая строка при этом не изменится.

$$A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 2+2(-1) & 1+(-1)(-1) & 1+3(-1) & 8+(-2)(-1)\end{pmatrix}$$

$$A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & -2 & 10\end{pmatrix}$$. Во втором столбце под диагональю один ненулевой элемент – элемент a_{32}. Аналогичными преобразова-

ниями обратим элемент a_{32} в ноль. Мысленно элементы второй строки умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам третей строки. Вторая строка при этом не изменится.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2+1(-2) & -2+(-1)(-2) & 10+5(-2) \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Мы привели матрицу к треугольному виду.

Подсчитаем число ненулевых строк. Следовательно, ranqA=2.

1.6. Произвольные системы линейных уравнений.

Произвольной системой линейных уравнений называется система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где A-основная матрица системы, X–матрица-столбец неизвестных, B–матрица-столбец свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Если к основной матрице A добавить столбец свободных членов B, получится расширенная матрица системы A_p:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Решением системы линейных уравнений называется совокупность чисел $c_1,c_2,\dots,c_n$, подстановка которых вместо $x_1,x_2,\dots,x_n$ соответственно ($x_1=c_1$, $x_2=c_2$, … $x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. *Несовместной* называется система, не имеющая ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Совместная система называется *неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений.

Основные этапы решения произвольной системы линейных уравнений

1) решение вопроса о совместности системы;

Понятие ранга матрицы позволяет решать произвольные системы m линейных уравнений с n неизвестными. Решение вопроса о совместности системы основано на теореме Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

ranq A = ranq A_p.

2) если система совместна, решить вопрос об определенности системы;

Для того, чтобы ответить на вопрос об определенности системы, надо сравнить ранг основной матрицы этой системы с числом неизвестных системы n. Если ранг основной матрицы системы A равен числу неизвестных n (ranqA=n), то система имеет единственное решение и является определенной.

Если ranqA<n, то система имеет бесконечное множество решений и является неопределенной.

3) найти единственное решение, если система является определенной и все решения системы, если она является неопределенной.

а). Находим в матрице А ранга r отличный от нуля минор (базисный минор) порядка r.

б). Выбираем r уравнений системы, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Остальные уравнения отбрасываем. Неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор, оставляем слева, а остальные $(n-r)$ неизвестных переносим в правые части уравнений и называем свободными.

Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются базисными.

в). Каким-либо из известных методов (Крамера, Гаусса) находим выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные. Получаем общее решение системы.

г). Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, находим соответствующие значения базисных неизвестных, то есть находим частные решения исходной системы.

1.7. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Метод Гаусса называют также методом последовательного исключения неизвестных. Суть метода состоит в том, что путем элементарных преобразований из всех уравнений системы, кроме первого, исключают неизвестное x_1; далее из всех уравнений, кроме первого и второго, исключают неизвестное x_2 и т.д. На практике все эти действия принято проводить не над уравнениями системы, а над строками расширенной матрицы системы.

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу приведем к виду трапеции, так как в последнем уравне-

нии останется одно неизвестное, в предпоследнем – два и т.д. Этот процесс называется *прямым ходом метода Гаусса*.
Элементарные преобразования, с помощью которых приводим расширенную матрицу к трапециевидному виду:

а). перестановка двух строк;

б). умножение всех элементов строки на любое отличное от нуля число;

в). прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на одно и то же число.

Эти элементарные преобразования не меняют эквивалентности системы (то есть не меняют множество решений системы).
Заметим, что при этом параллельно решаются вопросы о совместности и определенности системы.

Обратный ход метода Гаусса состоит в следующем: из последнего уравнения находим единственное входящее в него неизвестное, подставляем полученное значение в предпоследнее уравнение и находим второе неизвестное и так далее, пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже найдены все неизвестные, кроме одного. Таким образом, получим совокупность значений неизвестных, образующих решение системы.

Тема 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Вектором называют направленный отрезок (или упорядоченную пару точек). Вектор обозначают либо $\bar{a}$, либо $\overline{AB}$, где точка A – начало, точка B – конец его.

Длиной (или модулем) вектора называют расстояние между началом вектора и его концом. Обозначение – $|\bar{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

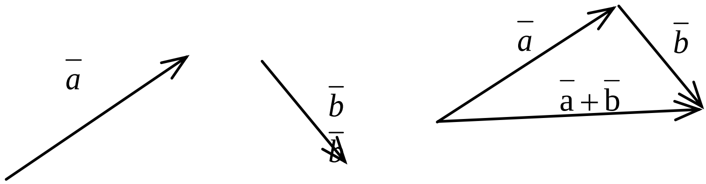
Нулевой вектор – вектор, длина которого равна 0, или вектор, у которого начало и конец находятся в одной точке.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными.*** Коллинеарность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают следующим образом: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

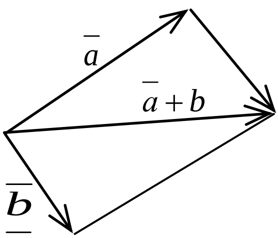
Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными.***

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число.

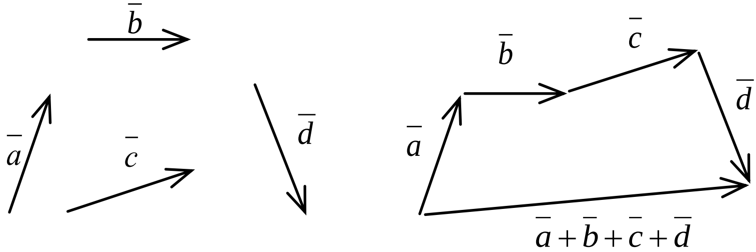
Сумму двух векторов можно найти по правилу треугольника, для чего их нужно расположить следующим образом: начало второго вектора совместить с концом первого; тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, и будет вектором суммы.



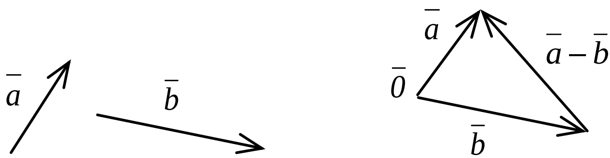
Два вектора можно сложить по правилу параллелограмма. Для этого начала обоих векторов помещают в общую точку. Затем на векторах, отложенных от общей точки, как на сторонах, строят параллелограмм, диагональ которого, исходящая из общей точки, будет вектором суммы.



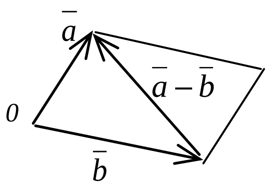
Сумму любого числа векторов находят по правилу многоугольника: начало каждого следующего слагаемого вектора помещают в конце предыдущего слагаемого вектора; вектор, соединяющий начало первого с концом последнего вектора, есть сумма этих векторов.



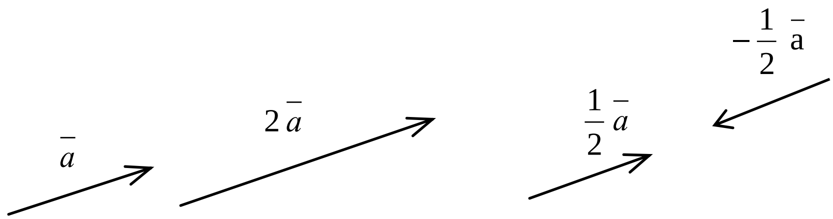
Чтобы найти ***разность двух векторов***, их надо привести к общему началу. Тогда вектор, проведенный из конца вектора-вычитаемого в конец вектора-уменьшаемого, и будет вектором разности.



Заметим: вектор разности двух векторов – это вектор, являющийся другой диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, как на сторонах.



В результате ***умножения вектора*** $\overline{a}$ ***на число*** $\boldsymbol{\lambda}$ получается вектор, коллинеарный вектору $\overline{a}$, одинаково с ним направленный, если $\lambda > 0$, и противоположно направленный, если $\lambda < 0$, причем длина вектора $\lambda\,\overline{a}$ в $|\lambda|$ раз больше длины вектора $\overline{a}$.



2.2. Понятие базиса. Разложение вектора по базису

Базисом на плоскости называют пару ненулевых неколлинеарных векторов, через которые может быть выражен любой вектор, лежащий в той же плоскости.

Разложить вектор $\overline{c}$ ***по базису*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ значит представить вектор $\overline{c}$ в виде

$$\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b},$$

где α и β – некоторые числа, которые называют *координатами вектора* $\overline{c}$ в базисе $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а сами векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют *базисными*. Пишут: $\overline{c} = \{\alpha, \beta\}$.

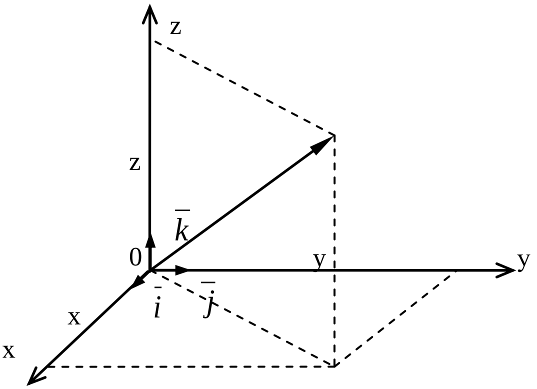
Линейные операции над векторами сводятся к точно таким же линейным операциям над их соответствующими координатами относительно одно и того же базиса, т. е. при сложении векторов их одноименные координаты складываются, а при умножении вектора на число – умножаются на это число.

Если два вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны.

Если базисные векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, то такой базис называют *ортонормированным*, а сами базисные векторы обозначают $\overline{i}$, $\overline{j}$ на плоскости и $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ в пространстве. Тогда разложение по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ имеет вид

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$

где x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называют *ортами*).



Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ – начало вектора $\overline{AB}$, а $\bar{B}(x_2, y_2, z_2)$ – конец этого вектора, то можно найти координаты самого вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

2.3. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Для скалярного произведения принято обозначение $(\bar{a}, \bar{b})$. Тогда $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами, т. е. $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то их скалярное произведение находится по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

С помощью скалярного произведения можно найти:

а) модуль вектора $\bar{a} = \{x, y, z\}$ –

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

б) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ –

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}\ .$$

Условие перпендикулярности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ состоит в следующем:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a},\bar{b}) = 0 .$$

2.4. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям:

а) $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

б) вектор $\bar{c}$ ориентирован так, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку;

в) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$ = S параллелограмма, построенного на этих векторах.

Векторное произведение обозначают $[\bar{a},\bar{b}]$.

Если $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то их векторное произведение выражается в виде определителя третьего порядка

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – орты декартова базиса.

2.5. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов $[\bar{a},\bar{b}]$ на третий вектор $\bar{c}$.

Обозначают смешанное произведение $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Тогда по определению $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = ([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$.

Смешанное произведение векторов $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов, т. е.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Если $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ лежат в одной плоскости, т. е. компланарны.

Смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, взятое по модулю, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, исходящих из общего начала:

$$V_{\text{пар}} = \left| (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \right|.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется матрицей размерности $m \times n$? Что такое квадратная матрица второго порядка, третьего порядка? Привести примеры.
2. Какие операции можно производить над матрицами? Привести примеры.
3. Способы вычисления определителя третьего порядка. Привести примеры.
4. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как найти обратную матрицу?
5. В чем состоит метод Крамера решения системы линейных уравнений?
6. В чем состоит матричный метод решения системы линейных уравнений?
7. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?
8. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
9. В чем заключается метод Гаусса решения системы линейных уравнений?

10. Какие векторы называются собственными и как они находятся?

11. Что называется вектором и модулем вектора?
12. Какие векторы называются коллинеарными и компланарными?
13. Перечислите линейные операции над векторами. Дайте определения каждой из этих операций. Приведите примеры.
14.Что называется координатами вектора в данном базисе?
15. К чему сводятся линейные операции над векторами, заданными координатами? Приведите примеры.
16. Что называется скалярным произведением двух векторов? Как оно выражается через координаты векторов?
17. Как найти угол между векторами?
18. Условие перпендикулярности двух векторов. Привести примеры пар перпендикулярных векторов.
19. Что называется векторным произведением двух векторов? Как оно выражается через координаты векторов?
20. Что собою геометрически представляет векторное произведение двух векторов?
21. Что называется смешанным произведением трех векторов? Как оно выражается через координаты векторов?
22. Что собою геометрически представляет смешанное произведение трех векторов?
23. В чем состоит условие компланарности трех векторов?

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

Задача 1. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Согласно пункту 2.1. будем иметь:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 0 + 6 = 6.$$

Задача 1. Вычислить определитель третьего порядка.
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение: Вычислить определитель можно несколькими способами: по правилу треугольников, разложением по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Воспользуемся правилом треугольников.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} -$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - (-2) \cdot$$
$$(-2) \cdot (-2) = -6 - 12 + 0 - 2 - 0 + 8 = -12.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12.$

Задача 2. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) методом Гаусса;
2) методом Крамера;
3) матричным способом.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}.$$

Решение:

1) Запишем расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований найдем ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы. Чтобы удобнее было получать нули под главной диагональю, от третей строки отнимем первую, а затем поменяем их местами.

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5-4 & 6-(-3) & -2-2 & 18-9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & -4 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right).$$

Первую строку мысленно умножим на (-2) и прибавим ко второй строке, первая строка при этом не изменится. Первую строку мысленно умножим на (-4) и прибавим к третей строке, первая строка при этом не изменится.

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на (-3) и прибавим к третей строке.

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3.$$

Совместность системы доказана, т.к. ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы. Ранг основной матрицы равен числу неизвестных системы, следовательно, система определена и имеет единственное решение.

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ примем за базисный. Базисные переменные: x_1, x_2, x_3; свободных переменных – нет.

Запишем систему, эквивалентную заданной:

$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 9 \\ \quad -13x_2 + 5x_3 = -14 \\ \qquad\qquad 3x_3 = 15 \end{cases}$. Проведем обратный ход метода Гаусса:

$x_3 = \dfrac{15}{3}$; $x_3 = 5$ подставим во второе уравнение: $-13x_2 + 5 \cdot 5 = -14$; $x_2 = 3$ подставим в первое уравнение: $x_1 + 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 9$; $x_1 = 2$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$.

2) Решим систему методом Крамера.

Запишем основную матрицу системы и матрицу-столбец свободных членов.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$; Вычислим определитель основной матрицы системы, например, по правилу треугольников.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot 2 -$$

$$-4 \cdot 6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) \cdot (-2) = 39$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Составим и вычислим определитель Δ_1, который получается из определителя основной матрицы системы заменой первого столбца столбцом свободных членов. Определители Δ_2 и Δ_3 получаются аналогичным способом – из определителя основной матрицы системы заменой второго и третьего столбца соответственно столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -90 + 162 + 48 - 180 + 162 - 24 = 78;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix} = -32 - 135 + 72 - 40 + 216 + 36 = 117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 360 - 60 + 108 - 225 - 96 + 108 = 195;$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находятся по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{117}{39} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{195}{39} = 5.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}.$

3) Решим систему матричным способом.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}.$$

Запишем основную матрицу системы, матрицу-столбец неизвестных, матрицу-столбец свободных членов.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\ \ B=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 18\end{pmatrix};$$ По правилу умножения матрицы на матрицу система равносильна матричному уравнению AX=B. Вычислим определитель основной матрицы системы.

$$\det A=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix}=4\cdot 5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)\cdot 5+2\cdot 6\cdot 2-5\cdot 5\cdot 2-$$

$$-4\cdot 6\cdot(-3)-2\cdot(-3)\cdot(-2)=39$$

Так как det A≠0, уравнение AX=B (следовательно и система) имеет единственное решение, которое находится по формуле $\boxed{X=A^{-1}B}$.

Найдем матрицу обратную к матрице A. В нашем случае она существует т.к. det A≠0.

Составим союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A. Алгебраические дополнения элементов матрицы a_{ij} вычисляются по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Вычислим алгебраическое дополнение A_{11} элемента матрицы a_{11} (i=1, j=1). Для того, чтобы составить минор M_{11} элемента матрицы a_{11} возьмем определитель матрицы A, вычеркнув в нем строку и столбец на пересечении которых стоит в матрице A элемент a_{11}. Алгебраические дополнения к остальным элементам матрицы A вычисляются аналогично. Учтем, что $(-1)^2=(-1)^4=\ldots=(-1)^{2k}=1,\ (-1)^1=(-1)^3=\ldots=(-1)^{2k+1}=-1.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{2} \begin{vmatrix} \boxed{\cancel{4}} & \cancel{-3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 5 & -3 \\ \cancel{5} & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-2) - 6 \cdot (-3) = -10 + 18 = 8;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} \cancel{4} & \boxed{\cancel{-3}} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{5} & -3 \\ 5 & \cancel{6} & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3)) = -11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{-3} & \boxed{\cancel{2}} \\ 2 & 5 & \cancel{-3} \\ 5 & 6 & \cancel{-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -13;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} \cancel{4} & -3 & 2 \\ \boxed{\cancel{2}} & \cancel{5} & \cancel{-3} \\ \cancel{5} & 6 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -((-3) \cdot (-2) - 6 \cdot 2) = 6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 4 & \cancel{-3} & 2 \\ \cancel{2} & \boxed{\cancel{5}} & \cancel{-3} \\ 5 & \cancel{6} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 2 = -18;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 4 & -3 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \boxed{\cancel{-3}} \\ 5 & 6 & \cancel{-2} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(4 \cdot 6 - 5 \cdot (-3)\right) = -39;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix} \cancel{4} & -3 & 2 \\ \cancel{2} & 5 & -3 \\ \boxed{\cancel{5}} & \cancel{6} & \cancel{-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=(-3)\cdot(-3)-5\cdot 2=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix} 4 & \cancel{-3} & 2 \\ 2 & \cancel{5} & -3 \\ \cancel{5} & \boxed{\cancel{6}} & \cancel{-2} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=-\left(4\cdot(-3)-2\cdot 2\right)=16;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix} 4 & -3 & \cancel{2} \\ 2 & 5 & \cancel{-3} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \boxed{\cancel{-2}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot 5-2\cdot(-3)=26;$$

Алгебраические дополнения и определитель основной матрицы системы подставим в формулу вычисления обратной матрицы.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix};$$

Чтобы получить решение системы перемножим матрицы A^{-1} и B.

$$X=A^{-1}B=$$

$$=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8\cdot 9+6\cdot 4+(-1)\cdot 18 \\ -11\cdot 9+(-18)\cdot 4+16\cdot 18 \\ -13\cdot 9+(-39)\cdot 4+26\cdot 18 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}78\\117\\195\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78/39\\117/39\\195/39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix};$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\\x_3=5\end{cases}.$

Задача 3. Даны матрицы A и B. Доказать, что $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-4\\2&5\end{pmatrix}.$$

Решение: Перемножим матрицу A на матрицу B, перемножим матрицу B на матрицу A и сравним полученные матрицы.

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2&1\cdot(-4)+2\cdot5\\-1\cdot1+(-1)\cdot2&-1\cdot(-4)+(-1)\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-1\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-4\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-4)\cdot(-1)&1\cdot2+(-4)\cdot(-1)\\2\cdot1+5\cdot(-1)&2\cdot2+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-1\end{pmatrix};$$

Следовательно $AB=BA$, что и требовалось доказать.

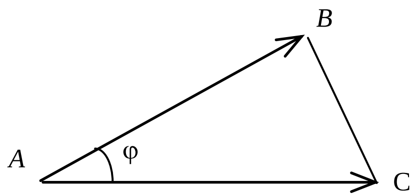
Задача 4. Даны вершины ΔABC: A (1, 2, 3), B (0, 4, 5), C (–1, 2, 0). Требуется найти:

1) косинус внутреннего угла при вершине A;
2) площадь ΔABC.

Решение: 1) Косинус угла между двумя векторами можно найти с помощью скалярного произведения (пункт 2.3) по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Сделаем схематично чертеж $\Delta\, ABC$.



Внутренний угол при вершине A есть угол, образованный векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, исходящими из общей точки A. Значит,

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{AB},\ \overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (пункт 2.2):

$\overline{AB} = \{0-1,\, 4-2,\, 5-3\} = \{-1,\, 2,\, 2\}$;

$\overline{AC} = \{-1-1,\, 2-2,\, 0-3\} = \{-2,\, 0,\, -3\}$.

Зная координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найдем их модули и скалярное произведение (пункт 2.3):

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$,

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

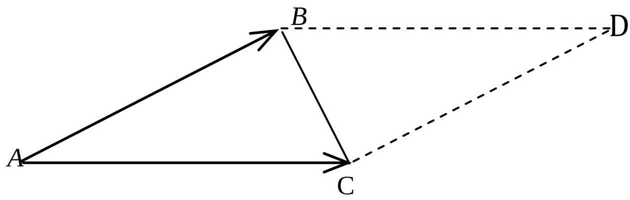
$\left(\overline{AB},\ \overline{AC}\right) = (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 2\cdot(-3) = 2-6 = -4$.

Тогда $\qquad \cos\varphi = \dfrac{-4}{3\sqrt{13}}$

(знак (–) говорит о том, что φ – тупой угол).

2) Площадь $\Delta\, ABC$ может быть найдена как половина площади параллелограмма $ABDC$.

$S_{\text{пар}} = \left|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right|$.(п. 2.4) $\qquad S_{\Delta\, ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right|$.



Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (пункт 2.4):

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

(разложить определитель по элементам первой строки $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) =

$$= \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 7\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Полученное разложение вектора, которым является векторное произведение, по ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ указывает нам координаты вектора $\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \{-6, -7, 4\}$, (пункт 2.2). Осталось найти модуль этого вектора:

$$\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 49 + 16} = \sqrt{101}.$$

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{101}.$$

Задача 5. Даны четыре точки A (2, −1, −2), B (1, 2, 1), C (2, 3, 0), D (5, 0, −6). Проверить, лежат ли данные точки в одной плоскости.

Решение: Одну из данных точек примем за общее начало, например, точку A. Из точки A направим векторы в точки B, C и D. Если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ будут компланарны, т. е. будут лежать в одной плоскости, то и все четыре точки A, B, C, D тоже будут лежать в одной плоскости. Найдем координаты векторов

$$\overline{AB} = \{-1,3,3\}\,,\quad \overline{AC} = \{0,4,2\}\,,\quad \overline{AD} = \{3,1,-4\}$$

и их смешанное произведение (п. 2.5)

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

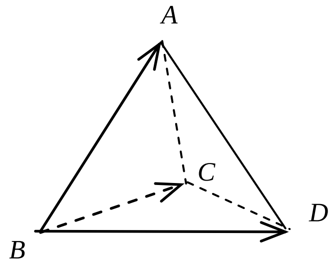
(разложили определитель по элементам первого столбца) = = 18 − 18 = 0. Отсюда следует (п. 2.5), что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ лежат в одной плоскости, следовательно, и точки A, B, C, D тоже лежат в одной плоскости.

Задача 6. Даны четыре точки $A\,(2,1,-1)$, $B\,(3,2,0)$, $C\,(4,1,-2)$, $D\,(0,5,3)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение: Средствами векторной алгебры может быть найден объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ как на сторонах:

$$V = \left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right|$$

Сделаем схематичный чертеж данной пирамиды.



Объем пирамиды равен $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда, сторонами которого являются те же векторы, что и у пирамиды. Если взять за общее начало векторов точку B, то

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар}} = \frac{1}{6}\left|(\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD})\right|.$$

Находим координаты векторов

$$\overline{BA}=\{-1,-1,-1\}\,,\quad \overline{BC}=\{1,-1,-2\}\,,\quad \overline{BD}=\{-3,3,3\}$$

и их смешанное произведение

$$(\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 3\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{vmatrix}=-3-3+0=-6\,.$$

Тогда $$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|-6\right|=\frac{1}{6}\cdot 6=1\,.$$

Ответ: $V_{\text{пир}}=1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в задание на контрольную работу № 1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1–10. Вычислить определитель третьего порядка

1. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

11–20. **.** Даны матрицы A и B. Доказать, что $AB = BA$.

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$ 12. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ 14. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ 16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ 18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

19. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ 20. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

21–30. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами:
а) методом Гаусса;
б) методом Крамера;
в) матричным способом.

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$;

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$;

24. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$;

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$;

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$;

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

41–50. Даны вершины ΔABC. Требуется найти:

1) косинус внутреннего угла при указанной вершине треугольника;

2) площадь ΔABC.

41. $A\ (2, -1, 3)$, $B\ (1, 1, 1)$, $C\ (0, 0, 5)$, угол при A.
42. $A\ (0, 4, 5)$, $B\ (4, 3, -1)$, $C\ (1, 1, 1)$, угол при B.
43. $A\ (3, -1, 2)$, $B\ (-1, 2, 0)$, $C\ (0, 4, 5)$, угол при C.
44. $A\ (1, 1, 1)$, $B\ (2, -3, 2)$, $C\ (4, 3, 1)$, угол при A.
45. $A\ (-1, 2, 1)$, $B\ (0, 4, -2)$, $C\ (2, -2, 3)$, угол при B.
46. $A\ (4, -3, 1)$, $B\ (1, 0, -2)$, $C\ (5, 1, -1)$, угол при C.
47. $A\ (1, 2, 3)$, $B\ (-1, 3, -7)$, $C\ (4, 2, 1)$, угол при A.
48. $A\ (3, 2, 1)$, $B\ (1, 2, 3)$, $C\ (4, -2, 1)$, угол при B.
49. $A\ (-1, 3, -7)$, $B\ (0, -1, -5)$, $C\ (1, 2, 3)$, угол при C.
50. $A\ (1, -1, 5)$, $B\ (3, 1, 4)$, $C\ (3, 2, 1)$, угол при A.

51–55. Даны четыре точки A, B, C, D. Проверить, лежат ли данные точки в одной плоскости.

51. $A\ (1, 3, 2)$, $B\ (2, 4, -3)$, $C\ (1, 0, 3)$, $D\ (2, -14, 3)$.
52. $A\ (2, 4, -1)$, $B\ (1, -2, 3)$, $C\ (2, 2, -5)$, $D\ (1, -1, 5)$
53. $A\ (-1, 2, 3)$, $B\ (3, 2, -1)$, $C\ (2, -4, 3)$, $D\ (-1, -2, 5)$.
54. $A\ (3, 2, 1)$, $B\ (0, 4, 5)$, $C\ (1, -2, 3)$, $D\ (2, 3, -1)$.
55. $A\ (4, -2, 3)$, $B\ (1, 0, 2)$, $C\ (2, 0, -1)$, $D\ (1, 1, -1)$.

56–60. Даны четыре точки A, B, C, D – вершины пирамиды. Найти объем пирамиды $ABCD$.

56. $A\ (1, 6, 2)$, $B\ (5, 2, 6)$, $C\ (5, 7, 4)$, $D\ (4, 10, 9)$.
57. $A\ (6, 6, 5)$, $B\ (4, 9, 5)$, $C\ (4, 6, 11)$, $D\ (6, 9, 3)$.
58 . $A\ (10, 6, 6)$, $B\ (-2, 8, 2)$, $C\ (6, 8, 9)$, $D\ (7, 10, 3)$.
59. $A\ (7, 2, 2)$, $B\ (5, 3, 1)$, $C\ (2, 3, 7)$, $D\ (5, 3, 3)$.
60. $A\ (5, 6, 8)$, $B\ (10, 5, 5)$, $C\ (6, 9, 9)$, $D\ (4, 6, 5)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Виленкин, И.В. Высшая математика / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов-н/Д. : «Феникс», 2010. – Гл. 1, с. 14 – 62.

2. Баврин, И.И. Высшая математика / И.И. Баврин. – М.: Академкнига, 2009. – Гл. 2, с. 36 – 85.

Дополнительная литература

3. Лесняк Л.И., Старенченко В.А. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко – Томск: Изд-во НТЛ, 2008. – С. 6 – 140.

4. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 35 – 83.

5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 143 – 196.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – СПб.: Лань, 2010. – С. 121 – 139, 201 – 222.

7. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев. – СПб.: Лань, 2007. – С. 35 – 87.