Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Составители Е.В. Черникова, Н.Н. Белов

Томск 2013

Элементы линейной алгебры: методические указания/ сост. Е.В. Черникова, Н.Н. Белов. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 39 с.

Рецензент к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Р.И. Лазарева
Редактор к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики О.Д. Пантюхова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Элементы линейной алгебры» студентами первого курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений подготовки специалистов и бакалавров.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики. Протокол № 4 от 10.12.2012 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо.

Срок действия с 1.09.2013
до 1.09.2018

Оригинал-макет подготовлен Е.В.Черниковой.

Подписано в печать 17.05.13.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 50 экз. Заказ № .

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнения контрольной работы по темам «Элементы линейной алгебры» и «Комплексные числа».

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	основные понятия линейной алгебры; понятие комплексного числа.
Уметь:	выполнять действия с матрицами и вычислять определители; решать системы линейных уравнений; выполнять действия с комплексными числами.
Владеть:	навыками использования методов линейной алгебры для решения практических задач.

Одной из основных задач линейной алгебры является исследование и решение систем линейных уравнений.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Матрицы и действия над ними

Определение. *Числовой матрицей* размерности $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|.$$

Числа a_{ij}, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Число i обозначает номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых в матрице A расположен элемент a_{ij}. Элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ называются *главными диагональными элементами*.

Матрица A размерности $(m \times n)$ обозначается: $A_{m \times n} = \|a_{ij}\|$.

Матрица размерности $(n \times n)$ называется *квадратной матрицей* порядка n.

Примеры квадратных матриц:

а) квадратная матрица третьего порядка $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

б) верхняя и нижняя треугольная матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

в) диагональная матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

г) единичная матрица третьего порядка $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. Операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами называется *транспонированием*. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать A^T.

К операциям над матрицами относятся:

1. **Сложение (вычитание) матриц**

Складывать (вычитать) можно лишь те матрицы, размерности которых совпадают. Для того чтобы сложить (вычесть) две матрицы, надо сложить (вычесть) их соответствующие элементы, то есть элементы, стоящие на одних и тех же местах.

Если $A_{m\times n} = \|a_{ij}\|$, $B_{m\times n} = \|b_{ij}\|$, то матрица $C=A+B$ такая что, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

2. **Умножение матрицы на число**

Для того чтобы умножить матрицу на отличное от нуля число, надо все элементы матрицы умножить на это число

$$\lambda A_{m\times n}=\|\lambda a_{ij}\|.$$

3. **Умножение матрицы на матрицу.**

Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число элементов в строке матрицы *A равно числу элементов в столбце* матрицы B. Если $(m\times n)$ – размерность матрицы A, $(n\times p)$– размерность матрицы B, то матрицу A можно умножить на матрицу B; при этом получится матрица $C=A\cdot B$ размерности $(m\times p)$. Формально:

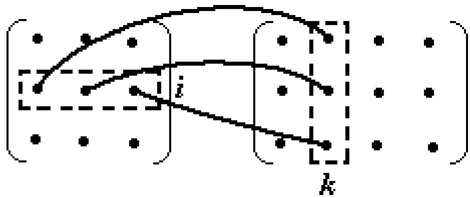
$$(m\times \boxed{n)(n}\times p)=(m\times p)$$

Произведением матрицы $A_{m\times n}=||a_{ij}||$ *на матрицу* $B_{m\times n}=||b_{ij}||$ *называется матрица* $C_{m\times p}=||c_{ij}||$ *такая, что*

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk},$$

где $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$.

Приведем схему получения элемента c_{ik}:



В общем случае $AB\neq BA$; (даже если обе операции допустимы). Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют условию $A\cdot B=B\cdot A$, то они называются перестановочными.

2. Определители. Свойства и вычисление

2.1. Вычисление определителя

Определение. *Определителем* или *детерминантом* квадратной матрицы A порядка n называется число, вычисляемое из элементов матрицы по определенному правилу.

Определитель матрицы A порядка n обозначается через $detA$(или $|A|$, или Δ).

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $detA$ следующим образом:

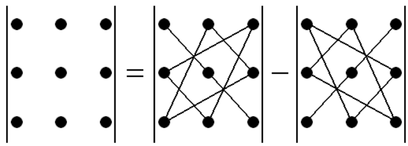
$\boldsymbol{n}$**=1:** $A=(a_1)$, $detA=a_1$;

***n*=2:** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$;

***n*=3:** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться ***правилом треугольника***, которое иллюстрируется схемой:



Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель порядка (n–1), полученный из элементов матрицы A после вычеркивания из нее строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит в матрице A элемент a_{ij}.

Если $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} порядка n называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. $detA=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$.

В частности для определителя третьего порядка

$$detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Следствие. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали, т.е.

$$detA=a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{kk}.$$

2.2. Свойства определителей

Свойство 1. Определитель, имеющий нулевую строку (или столбец), равен нулю.

Свойство 2. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (или строки), равен нулю.

Свойство 3. Определитель, у которого элементы двух строк (или столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{11} & \kappa a_{12} & \kappa a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Свойство 4. Определитель не меняется при транспонировании матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. При перемене местами двух строк (или столбцов) определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) умножить на отличное от нуля число, определитель умножится на это число:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо его столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{31} & a_{12}+\lambda a_{32} & a_{13}+\lambda a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Определение. Числа a_{ik} называются *коэффициентами при неизвестных* этой системы, а числа b_1, b_2, …, b_n – *свободными членами*.

Определение. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной матрицей системы*.

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы отличен от нуля. Неизвестные x_j находятся по формулам Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ – определитель основной матрицы системы, а Δ_j – определитель, который получается из определителя основной матрицы системы заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

3. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений

3.1. Вычисление обратной матрицы

Определение. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для невырожденной матрицы A, если выполняются условия:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Теорема (условие существования обратной матрицы): Если квадратная матрица A невырожденная, то она имеет обратную матрицу. Если обратная матрица существует, то она является единственной.

Для того, чтобы найти обратную матрицу необходимо:

1) вычислить $detA$. Если $detA \neq 0$, то матрица A^{-1} существует;

2) составить союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix};$$

3) транспонируя матрицу A^*, получить матрицу $(A^*)^T$, которую называют присоединенной матрицей и обозначают через $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix};$$

4) матрицу $\tilde{A}$ умножить на число $\dfrac{1}{detA} = \dfrac{1}{\Delta}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \dots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \dots \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \dots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix};$$

5) сделать проверку: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

3.2. Матричный метод решения систем n линейных уравнений с n неизвестными

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (*)$$

где A – основная матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, следовательно эти матрицы можно перемножать. По правилу умножения матриц $A \cdot X = B$. Полученное матричное уравнение равносильно системе $(*)$.

Таким образом, решение системы $(*)$ сводится к решению матричного уравнения $A \cdot X = B$.

Если $detA \neq 0$, то существует A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения слева на матрицу A^{-1} и воспользуемся свойствами операции умножения матриц:

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad E \cdot X = A^{-1}B.$$

Так как $E \cdot X = X$, то окончательно будем иметь

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Таким образом, если $detA \neq 0$, уравнение $A \cdot X = B$ (следовательно, и система (*)) имеет решение, которое находится по формуле $X = A^{-1}B$. Решение единственное в силу единственности матрицы A^{-1}.

4. Ранг матрицы

Определение. *Рангом* матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы и обозначается через $r = ranqA$.

Определение. *Базисным минором* матрицы A называют любой отличный от нуля минор этой матрицы, порядок которого равен рангу матрицы A.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице

Методы вычисления ранга матрицы

Первый метод – *метод окаймляющих миноров* – основан на определении ранга матрицы.

Второй метод – *метод элементарных преобразований* – состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно ее рангу. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Под элементарными преобразованиями матрицы понимают:

1) транспонирование матрицы,
2) перестановку двух строк (столбцов),
3) вычеркивание нулевой строки (столбца),
4) умножение какой-либо строки (столбца) на ненулевое число;
5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

***Пример*. *Вычислить ранг матрицы* A:**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся методом элементарных преобразований. Чтобы привести матрицу к ступенчатому виду необходимо получить под главной диагональю нули. Сначала получим нули в первом столбце, т.е. в первом столбце элементы a_{21} и a_{31} обратим в нули. Для этого к элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (–2). Первая строка при этом не изменится:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4+2(-2) & -1+(-1)(-2) & 5+3(-2) & 1+(-2)(-2) \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Затем к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (–1). Первая строка при этом не изменится:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2+2(-1) & 1+(-1)(-1) & 1+3(-1) & 8+(-2)(-1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & -2 & 10\end{pmatrix}.$$

Во втором столбце под диагональю один ненулевой элемент – элемент a_{32}. Аналогичными преобразованиями обратим элемент a_{32} в нуль. К элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на (–2). Вторая строка при этом не изменится:

$$A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & -2 & 10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2+1(-2) & -2+(-1)(-2) & 10+5(-2)\end{pmatrix}$$

$$A\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Мы привели матрицу к ступенчатому виду. Подсчитаем число ненулевых строк. Следовательно, $ranqA$=2.

5. Системы линейных уравнений

5.1. Основные понятия

Определение. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\ldots+a_{m\,n}x_n=b_m,\end{cases}$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Если к основной матрице A добавить столбец свободных членов B, получится расширенная матрица системы A_p:

$$A_p=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Определение. *Решением системы* линейных уравнений называется совокупность чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$, подстановка которых вместо $x_1,x_2,\ldots,x_n$ соответственно ($x_1=c_1$, $x_2=c_2$, … $x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. *Несовместной* называется система, не имеющая ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Совместная система называется *неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений.

5.2. Основные этапы решения системы m линейных уравнений с n неизвестными

1. *Решение вопроса о совместности системы.*

Понятие ранга матрицы позволяет решать произвольные системы m линейных уравнений с n неизвестными. Решение вопроса о совместности системы основано на теореме Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

$$ranqA = ranqA_p.$$

2. *Если система совместна, решить вопрос об определенности системы.*

Для того, чтобы ответить на вопрос об определенности системы, надо сравнить ранг основной матрицы этой системы с числом n неизвестных системы. Если ранг основной матрицы системы A равен числу неизвестных n ($ranqA=n$), то система имеет единственное решение и является определенной.

Если $ranqA<n$, то система имеет бесконечное множество решений и является неопределенной.

3. *Найти единственное решение, если система является определенной, или все решения системы, если она является неопределенной.*

а) Находим в матрице A ранга r отличный от нуля минор (*базисный* минор) порядка r.

б) Выбираем r уравнений системы, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Остальные уравнения отбрасываем.

Если при этом окажется, что $r=n$, то система будет иметь единственное решение, которое можно найти одним из способов, рассмотренных ранее.

При $r<n$ перепишем систему, оставив слева те слагаемые, коэффициенты при неизвестных в которых вошли в базисный минор, а остальные $(n-r)$ неизвестных переносим в правые части уравнений и называем *свободными*.

Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *базисными*.

в) Каким-либо из известных методов (Крамера, Гаусса) находим выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные. Получаем общее решение системы.

г) Если придавать свободным неизвестным конкретные значения, можно получить различные *частные* решения исходной системы.

5.3. Решение систем уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса называют также методом последовательного исключения неизвестных.

Суть метода состоит в том, что путем элементарных преобразований из всех уравнений системы, кроме первого, исключают неизвестное x_1; далее из всех уравнений, кроме первого и второго, исключают неизвестное x_2 и т.д.

На практике все эти действия принято проводить не над уравнениями системы, а над строками расширенной матрицы системы.

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу приведем к ступенчатому виду. На ее основе составляется система, эквивалентная исходной

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Этот процесс называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Заметим, что при этом параллельно решаются вопросы о совместности и определенности системы.

Обратный ход метода Гаусса состоит в следующем. Из последнего уравнения выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные. Затем подставляем x_k в предпоследнее и выражаем x_{k-1} и так далее, пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже найдены все неизвестные, кроме одного. Таким образом, получим совокупность значений неизвестных, образующих общее решение системы.

Тема 2. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Число, квадрат которого равен –1, называется *мнимой единицей* и обозначается символом *i*:

$$i = \sqrt{-1}; \quad i^2 = -1.$$

Определение. *Комплексным числом z* называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, число $x + i0 = x$ отождествляется с *действительным* числом x.

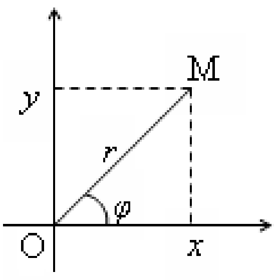
Множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Определение. Число x называется *действительной частью* комплексного числа *z* и обозначается $x = Re\, z$, а y – *мнимой частью* комплексного числа *z* и обозначается $y = Im\, z$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = Re\, z$, $y = Im\, z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Определение. Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной* осью, так как на ней лежат действительные числа $z = x + i0 = x$. Ось ординат называется *мнимой* осью, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy = iy$.



Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y)$.

Определение. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается $Arg\, z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $\left(k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots\right)$:

$$Arg\, z = arg\, z + 2\pi k,$$

где $arg\, z$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0, 2\pi)$.

Запись комплексного числа z в виде $\boxed{z = x + iy}$ называют *алгебраической формой записи* комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$.

Тогда $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \text{ или } \boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}.$$

Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Вопросы для самопроверки:

1. *Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы свойства этих операций? Приведите примеры.*
2. *Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений? Приведите примеры.*
3. *Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными, а какие – не совместными?*
4. *Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.*
5. *При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?*

6. *Для каких систем уравнений используется метод Крамера? В чем он состоит?*
7. *Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.*
8. *Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?*
9. *Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?*
10. *В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?*
11. *Что называется комплексным числом?*
12. *Что называется действительной и мнимой частями комплексного числа?*
13. *Что называется модулем и аргументом комплексного числа?*
14. *В каком случае два комплексных числа называются сопряженными?*
15. *Что называется алгебраической и тригонометрической формами записи комплексного числа?*

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. Даны матрицы A и B. Доказать, что $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение: Умножим матрицу A на матрицу B, и матрицу B на матрицу A и сравним полученные матрицы:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-4) + 2\cdot 5 \\ -1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & -1\cdot(-4) + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-4)\cdot(-1) & 1\cdot 2+(-4)\cdot(-1)\\ 2\cdot 1+5\cdot(-1) & 2\cdot 2+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $AB=BA$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}.$$

Решение: Вычислить определитель можно несколькими способами: по правилу треугольников, разложением по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца.

Воспользуемся правилом треугольников:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{23}a_{11}-$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33}=3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 2\cdot 3+1\cdot 0\cdot(-2)-2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 3\cdot 0-(-2)\cdot(-2)\cdot$$

$$\cdot(-2)=-6-12+0-2-0+8=-12.$$

Ответ: $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-12.$

Задача 3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\ 2x_1+5x_2-3x_3=4,\\ 5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) методом Гаусса;

2) методом Крамера;

3) матричным способом.

Решение:

1) Запишем расширенную матрицу системы:

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований найдем ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы.

Чтобы удобнее было получать нули под главной диагональю, из третьей строки вычтем первую, а затем поменяем их местами:

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5-4 & 6-(-3) & -2-2 & 18-9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & -4 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на (-2), при этом первая строка не изменится.

Прибавим к третьей строке первую строку, умноженную на (-4), при этом первая строка не изменится:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на (-3) и прибавим к третьей строке:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow rangA = rangA_p = 3.$$

Совместность системы доказана, т.к. ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Ранг основной матрицы равен числу неизвестных системы, следовательно, система определена и имеет единственное решение.

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ примем за базисный. Базисные переменные: x_1, x_2, x_3; свободных переменных нет.

Запишем систему, эквивалентную заданной:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 9, \\ \quad -13x_2 + 5x_3 = -14, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Проведем обратный ход метода Гаусса:

$$x_3 = \frac{15}{3};\ x_3 = 5,$$

подставим во второе уравнение:

$$-13x_2 + 5 \cdot 5 = -14;\ x_2 = 3,$$

подставим в первое уравнение:

$$x_1 + 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 9;\ x_1 = 2.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 5. \end{cases}$

2) Решим систему уравнений методом Крамера.

Запишем основную матрицу системы и матрицу-столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 18\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель основной матрицы системы, например, по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix}=4\cdot5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)\cdot5+2\cdot6\cdot2-5\cdot5\cdot2-$$

$$-4\cdot6\cdot(-3)-2\cdot(-3)\cdot(-2)=39.$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Составим и вычислим определитель Δ_1, который получается из определителя основной матрицы системы заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9 & -3 & 2\\ 4 & 5 & -3\\ 18 & 6 & -2\end{vmatrix}=-90+162+48-180+162-24=78.$$

Определители Δ_2 и Δ_3 получаются аналогичным способом – из определителя основной матрицы системы заменой второго и третьего столбца соответственно столбцом свободных членов.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 9 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 5 & 18 & -2\end{vmatrix}=-32-135+72-40+216+36=117;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -3 & 9\\ 2 & 5 & 4\\ 5 & 6 & 18\end{vmatrix}=360-60+108-225-96+108=195.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находятся по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{78}{39}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{117}{39}=3,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{195}{39}=5.$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=3,\\ x_3=5.\end{cases}$

3) Решим систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\ 2x_1+5x_2-3x_3=4,\\ 5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}.$$

Запишем основную матрицу системы, матрицу-столбец неизвестных, матрицу-столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 18\end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц система равносильна матричному уравнению $AX=B$.

Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$detA=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix}=4\cdot5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)\cdot5+2\cdot6\cdot2-5\cdot5\cdot2-$$

$$-4\cdot6\cdot(-3)-2\cdot(-3)\cdot(-2)=39.$$

Так как $detA\neq0$, уравнение $A\cdot X=B$ (следовательно, и система) имеет единственное решение, которое находится по формуле

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Найдем матрицу обратную к матрице A. В нашем случае она существует т.к. $detA \neq 0$.

Составим союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Алгебраические дополнения элементов матрицы a_{ij} вычисляются по формуле

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Вычислим алгебраическое дополнение A_{11} элемента матрицы a_{11} (i=1, j=1).

Для того, чтобы составить минор M_{11} элемента матрицы a_{11} возьмем определитель матрицы A, вычеркнув в нем строку и столбец на пересечении которых стоит в матрице A элемент a_{11}:

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \boxed{\cancel{4}} & \cancel{-3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 5 & -3 \\ \cancel{5} & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-2) - 6 \cdot (-3) = -10 + 18 = 8.$$

Алгебраические дополнения к остальным элементам матрицы A вычисляются аналогично. Учтем, что

$$(-1)^2 = (-1)^4 = \ldots = (-1)^{2k} = 1,\ (-1)^1 = (-1)^3 = \ldots = (-1)^{2k+1} = -1.$$

Получим

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} \cancel{4} & \boxed{\cancel{-3}} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{5} & -3 \\ 5 & \cancel{6} & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3)) = -11;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}\cancel{4} & \cancel{-3} & \boxed{\cancel{2}}\\ 2 & 5 & \cancel{-3}\\ 5 & 6 & \cancel{-2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & 6\end{vmatrix}=2\cdot 6-5\cdot 5=-13;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}\cancel{4} & -3 & 2\\ \boxed{\cancel{2}} & \cancel{5} & \cancel{-3}\\ \cancel{5} & 6 & -2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-((-3)\cdot(-2)-6\cdot 2)=6;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & \cancel{-3} & 2\\ \cancel{2} & \boxed{\cancel{5}} & \cancel{-3}\\ 5 & \cancel{6} & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-2)-5\cdot 2=-18;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & -3 & \cancel{2}\\ \cancel{2} & \cancel{5} & \boxed{\cancel{-3}}\\ 5 & 6 & \cancel{-2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=-\big(4\cdot 6-5\cdot(-3)\big)=-39;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}\cancel{4} & -3 & 2\\ \cancel{2} & 5 & -3\\ \boxed{\cancel{5}} & \cancel{6} & \cancel{-2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=(-3)\cdot(-3)-5\cdot 2=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & \cancel{-3} & 2\\ 2 & \cancel{5} & -3\\ \cancel{5} & \boxed{\cancel{6}} & \cancel{-2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-\big(4\cdot(-3)-2\cdot 2\big)=16;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & -3 & \cancel{2} \\ 2 & 5 & \cancel{-3} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \boxed{\cancel{-2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 26.$$

Алгебраические дополнения и определитель основной матрицы системы подставим в формулу вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить решение системы перемножим матрицы A^{-1} и B:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 \cdot 9 + 6 \cdot 4 + (-1) \cdot 18 \\ -11 \cdot 9 + (-18) \cdot 4 + 16 \cdot 18 \\ -13 \cdot 9 + (-39) \cdot 4 + 26 \cdot 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78/39 \\ 117/39 \\ 195/39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 5. \end{cases}$

Задача 4. Найти все корни уравнения:

$$(x^2-169)(x^2+2x+26)=0\ .$$

Решение: Используя равносильные преобразования, получим совокупность двух уравнений, каждое из которых будем решать отдельно с помощью формул сокращенного умножения и метода решения квадратных уравнений:

$$(x^2-169)(x^2+2x+26)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-169=0, \\ x^2+2x+26=0. \end{array}\right.$$

1. $x^2-169=0$

$(x-13)(x+13)=0$

$\begin{cases} x_3=13, \\ x_4=-13; \end{cases}$

2. $x^2+2x+26=0$

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot 26=$

$=4-104=-100;$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-100}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{100\cdot(-1)}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{10^2\cdot i^2}}{2}=\frac{-2\pm 10i}{2};$$

$$x_1=\frac{-2+10i}{2}=\frac{-2}{2}+\frac{10}{2}i=-1+5i;$$

$$x_2=\frac{-2-10i}{2}=\frac{-2}{2}-\frac{10}{2}i=-1-5i.$$

Ответ: $\pm 13,\ -1\pm 5i$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент должен выполнять контрольное задание по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант 1

1. *Даны матрицы* A *и* B*. Доказать, что* $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2 - 16\right)\left(x^2 - 2x + 5\right) = 0$.

Вариант 2

1. *Даны матрицы* A *и* B*. Доказать, что* $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-9\right)\left(x^2+2x+10\right)=0$.

Вариант 3

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=2,\\ 2x_1+x_2-3x_3=4,\\ 2x_1+2x_2-x_3=1.\end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-36\right)\left(x^2-4x+5\right)=0$.

Вариант 4

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4x + 5\right) = 0$.

Вариант 5

1. *Даны матрицы A и B. Доказать, что $AB = BA$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-49\right)\left(x^2-2x+17\right)=0$.

Вариант 6

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\ 2x_1+x_2+3x_3=4,\\ x_1+3x_2-x_3=5.\end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-25\right)\left(x^2-4x+13\right)=0$.

Вариант 7

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2 - 100\right)\left(x^2 - 4x + 8\right) = 0$.

Вариант 8

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2 - 81\right)\left(x^2 + 6x + 10\right) = 0$.

Вариант 9

1. *Даны матрицы* A *и* B. *Доказать, что* $AB = BA$.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=3,\\ x_1-x_2+3x_3=2,\\ -x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-64\right)\left(x^2-2x+2\right)=0$.

Вариант 10

1. *Даны матрицы A и B. Доказать, что* $AB=BA$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. *Вычислить определитель третьего порядка:* $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$.

3. *Дана система линейных уравнений:* $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1,\\ 3x_1-2x_2-2x_3=1,\\ 3x_1+3x_2+x_3=2.\end{cases}$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричным способом.

4. *Найти все корни уравнения:* $\left(x^2-121\right)\left(x^2-6x+18\right)=0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 2008. – Т. 1. Гл. 7. С. 218 – 224; Т. 2. Гл. 21. С. 529 – 532; 534 – 540; 543 – 545; 550 - 553.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2008, ч.1. С. 10 – 30; 186 – 192.
3. Лесняк, Л.И. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналетическая геометрия / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск: Изд-во том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 284 с.

Дополнительная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 35 – 83.
2. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980 – 1987, С. 142 – 231.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980 - 1999. – Ч. 1. С. 76 – 148.