Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители М.В. Зголич,
О.Д. Пантюхова,
Т.А. Шалыгина

Томск 2017

Элементы математического анализа: методические указания / Сост. М.В. Зголич, О.Д. Пантюхова, Т.А. Шалыгина. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 42 с.

Рецензент к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Куницына Т.С.
Редактор к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Липатникова Я.Д.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» предназначены для студентов заочной формы обучения ТГАСУ всех направлений и профилей подготовки бакалавров, всех направлений специализаций подготовки специалистов и написаны в помощь при выполнении контрольной работы. Методические указания содержат введение, краткие теоретические сведения, разобранные типовые задачи, вопросы для самопроверки, правила выполнения и оформления контрольной работы, задания для контрольной работы и список рекомендуемой литературы.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики, протокол № 2 от 12.10.2016 г.

Срок действия с 01.09.2017
до 01.09.2022

Оригинал-макет подготовлен О.Д. Пантюховой

Подписано в печать 06.02.17.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,21. Тираж 30 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ОПП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Окружающий человека мир изменяется, и вся практическая деятельность человека направлена на изменение окружающего его мира. Изучение характера изменения различных величин, поиск закономерностей, которым эти изменения подчиняются есть основная задача аппарата математики, который принято называть математическим анализом.

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения ТГАСУ при выполнении контрольной работы по разделам «Введение в анализ» и «Функции нескольких переменных». Освоение данных разделов способствует формированию у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, например, таких как:

– ОК-1: владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

– ОК-2: умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;

– ПК-2: способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

В результате освоения раздела студент должен: *знать* основные понятия и определения; *уметь* самостоятельно использовать математический аппарат; *владеть* первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Функции одной переменной. Предел и непрерывность

Понятие функции. Изучая какое-либо явление природы, обычно имеют дело с *переменными величинами*, которые связаны между собой так, что значения одних из них полностью определяют значения других. Переменную величину y называют ***функцией от переменной величины x***, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению величины x по некоторому закону соответствует единственное значение величины y. Пишут $y = f(x)$, читают: «y есть функция от x» или «y есть эф от x». Буква f здесь обозначает закон соответствия между x и y.

Переменную величину x называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, переменную величину y – ***зависимой переменной***. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости.

Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция y определена, называют ***областью определения*** функции и обозначают $D(f)$.

Задать функцию означает указать ее область определения и закон, при помощи которого по данному значению независимой переменной находят соответствующее ему значение функции. Обычно рассматривают аналитический, табличный и графический способы задания функции.

Предел функции. Бесконечные величины. Пусть независимая переменная x *неограниченно приближается* к числу x_0. Это означает, что мы придаем x значения, сколь угодно приближающиеся к x_0, но не равные x_0. В этом случае говорят, что x стремится к x_0 и пишут $x \to x_0$. Может оказаться при этом, что соответствующие значения $f(x)$ *неограниченно приближаются* к некоторому числу A. Тогда говорят, что число A есть *предел* функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ или что функция $y = f(x)$ стремится к числу A при $x \to x_0$.

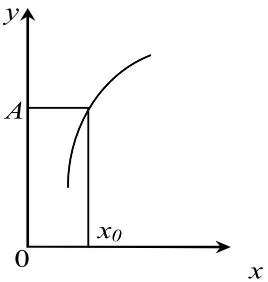
Опр. Число A называют ***пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от числа x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

Если A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A .$$

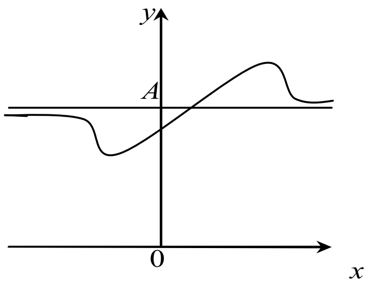
Точку x_0, к которой стремится независимая переменная x, называют ее ***предельной точкой***.

Геометрическая иллюстрация рассмотренного случая, представлена на рис. 1.



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Рис. 1.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Рис. 2.

В определении предела не требуется, чтобы функция была определена в предельной точке, достаточно, чтобы функция была определена в какой-нибудь ее окрестности.

Пусть независимая переменная x функции $y = f(x)$ *неограниченно возрастает*. Это означает, что мы придаем x любые значения, большие всякого наперед заданного положительного числа. В этом случае говорят, что x стремится к *положительной бесконечности* и пишут $x \to +\infty$. Если независимая переменная x *неограниченно убывает*, т. е. становится меньше всякого наперед заданного отрицательного числа, то говорят, что x стремится к *отрицательной бесконечности* и пишут $x \to -\infty$. Аргумент функции, изменяющийся указанным образом, называют ***бесконечно большим аргументом***.

Может оказаться, что при бесконечно большом аргументе соответствующие значения $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A. Тогда говорят, что число A есть *предел* функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или что функция $y = f(x)$ стремится к числу A при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Часто бывает, что и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ стремится к одному и тому же пределу A (рис. 2).

Опр. Число A называют ***пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для всех значений x, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

В этом случае пишут

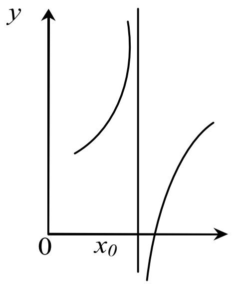
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Пусть функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ *неограниченно возрастает по абсолютной величине*. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной.

Опр. Функцию $y = f(x)$ называют ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ по абсолютной величине превосходят любое наперед заданное сколь угодно большое положительное число.

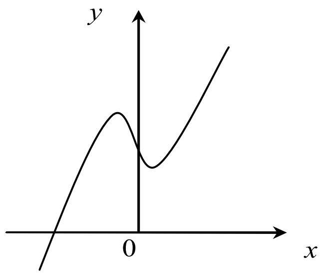
Если функция $f(x)$ – бесконечно большая величина при $x \to x_0$ (рис. 3) или при $x \to \infty$ (рис. 4), то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty .$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Рис. 3.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Рис. 4.

Функция $y = f(x)$, являющаяся при $x \to x_0$ бесконечно большой величиной, не имеет предела в обычном смысле. Однако, желая отобразить закономерность в ее предельном поведении, говорят, что функция $f(x)$ *стремится к бесконечности* или имеет своим пределом *бесконечность*. Если бесконечно большая величина $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 принимает только положительные или только отрицательные значения, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к положительной или соответственно к отрицательной бесконечности и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty .$$

Односторонние пределы функции. Бывают случаи, когда функция $y = f(x)$ стремится к одному пределу A_1, если $x \to x_0$, все время оставаясь меньше, чем x_0, и та же самая функция $y = f(x)$ стремится к другому пределу A_2, если $x \to x_0$, все время оставаясь больше чем x_0. В первом случае предел называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *слева*, во втором – *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа*; пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 .$$

Из определения предела следует, что

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \right).$$

Непрерывность функции.

Опр. Функцию $y = f(x)$ называют ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) $f(x)$ определена в т. x_0 и в некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в предельной точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если хотя бы одно из трех условий не выполняется, то функцию $y = f(x)$ называют ***разрывной*** в точке x_0, а точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции.

Опр. Функцию $y = f(x)$ называют ***непрерывной в интервале*** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Опр. Функцию $y = f(x)$ называют ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b), в точке $x = a$ непрерывна справа (т. е. $\lim\limits_{x \to a + 0} f(x) = f(a)$), в точке $x = b$ непрерывна слева (т. е. $\lim\limits_{x \to b - 0} f(x) = f(b)$).

***Отметим, что*:**

• все простейшие элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения;

• любая суперпозиция из простейших элементарных функций, последовательно примененная конечное число раз, непрерывна в каждой точке своей области определения (на основании теоремы о непрерывности сложной функции).

• любая функция, полученная из непрерывных функций с помощью четырех арифметических действий, непрерывна в каждой точке своей области определения.

Техника вычисления пределов. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это означает, что для нахождения указанного предела достаточно вычислить значение функции в точке x_0.

Для нахождения пределов используют также теоремы о пределах и свойствах бесконечно малых и бесконечно больших величин. Укажем случаи, когда эти теоремы неприменимы.

Пусть:

$$\alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0, \qquad u(x) \to \infty \text{ при } x \to x_0,$$

$$\beta(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0, \qquad v(x) \to \infty \text{ при } x \to x_0,$$

$$f(x) \to 1 \text{ при } x \to x_0;$$

тогда при $x \to x_0$ следующие выражения являются неопределенными:

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \left(\frac{0}{0}\right), \quad \frac{u(x)}{v(x)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$\alpha(x) \cdot u(x) \ (0 \cdot \infty),$$

$$u(x) - v(x) \ (\infty - \infty),$$

$$f(x)^{u(x)} \ (1^{\infty}), \quad \alpha(x)^{\beta(x)} \ (0^0), \quad u(x)^{\beta(x)} \ (\infty^0).$$

Примерами неопределенностей служат замечательные пределы и их следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1^{\infty}\right)=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\left(1^{\infty}\right)=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\ln x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{\ln a}.$$

Заметим, что выражения вида

$$\frac{\alpha(x)}{u(x)}\left(\frac{0}{\infty}\right)\quad \text{и} \quad \frac{u(x)}{\alpha(x)}\left(\frac{\infty}{0}\right)$$

неопределенными не являются. По свойствам бесконечно малых и бесконечно больших величин

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{u(x)}\left(\frac{0}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\frac{1}{u(x)}=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\alpha(x)}\left(\frac{\infty}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}u(x)\cdot\frac{1}{\alpha(x)}=\infty.$$

• Вычисление пределов имеет смысл разбить на следующие три этапа:

1) выяснить возможность применения: теорем о непрерывности, о пределах, свойств бесконечно малых и бесконечно больших величин;

2) установить тип неопределенности (если предел не найден на первом этапе);

3) применить специальный прием раскрытия установленного типа неопределенности.

Конкретные примеры на раскрытие неопределенных выражений можно найти в [7].

2. Производная функции одной переменной

Понятие производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и величина Δx такова, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции в точке x_0 и обозначают $\Delta f(x_0)$, т. е. по определению

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Величину Δx называют приращением аргумента в точке x_0.

Опр. ***Производной*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta y(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю ($\Delta x \to 0$).

Производную функции в точке x_0 обозначают

$$y'(x_0), \qquad f'(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x = x_0}.$$

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют дифференцируемой в точке x_0.

Если функция дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

Операцию нахождения производной от функции называют дифференцированием функции. Таблицу производных и правила нахождения производных называют соответственно формулами и правилами дифференцирования.

***Геометрический смысл производной*:** производная от функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту k касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0:

$$f'(x_0)=k.$$

Уравнение касательной может быть записано в виде:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

***Механический смысл производной*:** производная от функции $y=f(x)$ в точке x_0 есть скорость изменения этой функции в точке x_0.

Если функция $s=s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то производная $s'(t_0)$ определяет скорость движения материальной точки в момент времени t_0:

$$\upsilon(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\upsilon_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t_0).$$

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 (конечную) производную $f'(x_0)$, то в точке x_0 эта функция непрерывна.

Производная сложной функции. Пусть функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ определяют сложную функцию $y=f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $u'_x=\varphi'(x_0)$, а функция $y=f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0=\varphi(x_0)$ производную $y'_u=f'(u_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ в точке x_0 также имеет производную, причем

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Формула (6) выражает правило: *производная сложной функции* $y=f[\varphi(x)]$ *по аргументу x равна производной данной* *функции по промежуточному аргументу* $u = \varphi(x)$*, умноженной на производную промежуточного аргумента* $u = \varphi(x)$ *по x.*

Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ во всех точках промежутка (a, b).

Если существует производная от производной $f'(x)$, то ее называют производной второго порядка (или второй производной) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из следующих символов:

$$y'', \qquad f''(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Итак, по определению

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Аналогично определяют и обозначают производную *n*-го порядка.

Механический смысл второй производной. Если функция $s = s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то

$s'(t)$ определяет мгновенную скорость точки (скорость в момент времени *t*): $s'(t) = \upsilon(t)$;

$s''(t)$ определяет скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки в момент времени *t*: $s''(t) = \upsilon'(t) = a(t)$.

3. Функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных. Каждой паре значений *x* и *y* на плоскости *Oxy* соответствует некоторая точка $M(x, y)$. Возьмем некоторое множество точек на плоскости *Oxy* и обозначим его через *D*.

Переменную величину z называют ***функцией двух независимых переменных х и у*** на множестве D, если каждой точке этого множества по некоторому закону соответствует единственное значение величины z. Пишут $z = f(x, y)$.

Множество точек D называют областью определения или областью задания функции z.

Функцию двух переменных, как и функцию одной переменной, можно задать таблично, аналитически и графически.

Переменную величину u называют ***функцией n независимых переменных*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой системе значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по некоторому закону соответствует единственное значение величины u. Пишут $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В общем случае графиком функции двух переменных является некоторая поверхность. Функцию трех и более переменных задать графически невозможно.

Предел и непрерывность функции двух переменных.

Опр. Число A называют ***пределом*** функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся соответственно от чисел x_0 и y_0, соответствующие значения $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа A.

В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Опр. Функцию $z = f(x, y)$ называют ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, если:

1) $f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) этот предел равен значению функции в предельной точке

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Если хотя бы одно из трех условий не выполняется, то точку $M_0(x_0, y_0)$ называют ***точкой разрыва*** функции $z = f(x, y)$.

Опр. Функцию $z = f(x, y)$ называют ***непрерывной в некоторой области***, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Частные производные. Пусть в некоторой области D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Выберем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ и дадим x_0 приращение Δx, а y_0 оставим неизменным. Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое ***частным приращением по x в точке*** $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Опр. ***Частной производной*** функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$.

Частную производную по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad z'_x(M_0), \qquad f'_x(x_0, y_0).$$

Итак, по определению

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная функции $z = f(x, y)$ по y:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные функций трех или более переменных определяются и обозначаются аналогично.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных, при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Поэтому частные производные функции нескольких переменных находят по формулам и правилам, по которым находят производную функции одной переменной.

Механический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$: $f'_x(x_0, y_0)$ определяет скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении оси Ox, $f'_y(x_0, y_0)$ – в направлении оси Oy.

Частные производные высших порядков. Частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ от функции $z = f(x, y)$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции двух переменных x и y. Эти функции могут иметь частные производные по x и по y, которые называют частными производными второго порядка. Их определяют и обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называют ***смешанными***.

Теорема. Если вторые смешанные производные функции $z=f(x,y)$ непрерывны, то они равны между собой:
$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Частные производные высших порядков для функций любого числа независимых переменных определяются и обозначаются аналогично. Остается в силе и теорема о независимости смешанных частных производных от последовательности дифференцирования при условии их непрерывности.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда в области *D* она достигает своих наибольшего и наименьшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области *D*, либо на ее границе.

Правило. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной в области *D* функции $z=f(x,y)$, поступают следующим образом.

1. Находят критические точки, принадлежащие области *D* и вычисляют значения функции в этих точках.

2. Находят наибольшее и наименьшее значения функции на границах области *D*.

3. Выбирают из полученных значений функции наибольшее и наименьшее.

II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

$D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$,

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$,

$f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0$.

Решение.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = -2$ прижимается к прямой $x = -2$, устремляясь вниз.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = 2$ прижимается к прямой $x = 2$, устремляясь вверх.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ прижимается к оси *Ox*.

$f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0 \Rightarrow$ график функции пересекает ось *Ox* в точках $x = 0$, $x = \pm 3$.

График функции (один из возможных) представлен на рис. 5.

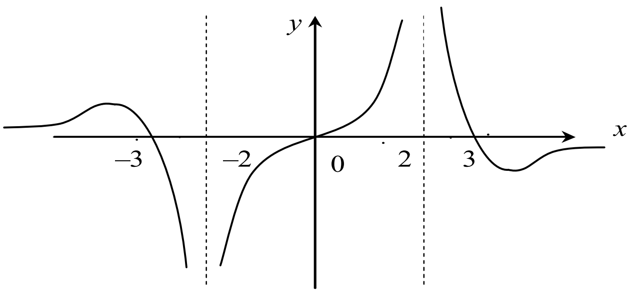


Рис. 5

Задача 2. Найдите указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Числитель и знаменатель дроби разложим на множители.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-2)(x+2/3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{3(x+2/3)}=-\frac{1}{8}.$$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Числитель и знаменатель дроби разделим почленно на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{2}{1}=2.$$

$\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{3}{x^3}$ – бесконечно малые величины при $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}7x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7x}=\dfrac{5}{7}$.

Здесь учли, что при $x\to 0$ $\sin 5x\sim 5x$, $\operatorname{tg} 7x\sim 7x$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}\left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^{-6}$.

Показатель степени умножили и разделили на $-3/x$.

Задача 3. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$,

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$,

3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

5. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

8. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

9. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

13. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

В формуле (1) $\lambda \neq 0$, в формулах (2) и (4) $a > 0$ и $a \neq 1$.

Основные правила нахождения производных

Пусть C – постоянная величина, $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1. $\left(C\right)' = 0$.

2. $\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$.

3. $\left(u \pm \upsilon\right)' = u' \pm \upsilon'$.

4. $\left(u \cdot \upsilon\right)' = u' \cdot \upsilon + \upsilon' \cdot u$.

5. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$.

Итак, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от данной функции.

1. $\boldsymbol{y = 7x^2 + 3x - 2}$**.**

Применяя правило дифференцирования (3), получим:

$$y' = \left(7x^2 + 3x - 2\right)' = \left(7x^2\right)' + \left(3x\right)' - \left(2\right)' =$$

$$= 7\cdot\left(x^2\right)' + 3\cdot\left(x\right)' - \left(2\right)' = 14x + 3\cdot 1 = 14x + 3.$$

2. $\boldsymbol{y = x^3 \cdot \mathrm{ctg}x}$**.**

Применяя правило дифференцирования (4) получим:

$$y' = \left(x^3\cdot\mathrm{ctg}x\right)' = \left(x^3\right)'\cdot\mathrm{ctg}x + \left(\mathrm{ctg}x\right)'\cdot x^3 =$$

$$= 3x^2\cdot\mathrm{ctg}x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot x^3 = 3x^2\cdot\mathrm{ctg}x - \frac{x^3}{\sin^2 x}.$$

3. $\boldsymbol{y = \dfrac{-7x^2}{x^2+7}}$**.**

Предварительно вынесем постоянный множитель -7 за знак производной (правило дифференцирования (2)), и применим правило дифференцирования (5). Получим:

$$y' = \left(\frac{-7x^2}{x^2+7}\right)' = -7\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+7}\right)' =$$

$$= -7\cdot\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+7\right) - \left(x^2+7\right)'\cdot\left(x^2\right)}{\left(x^2+7\right)^2} =$$

$$= -7\cdot\frac{2x\cdot\left(x^2+7\right) - 2x^3}{\left(x^2+7\right)^2} = -7\cdot\frac{14x}{\left(x^2+7\right)^2}.$$

4. $\boldsymbol{y = (2x+7)^9}$**.**

Данная функция является сложной функцией. По правилу нахождения производной сложной функции имеем: производная сложной функции $y=(2x+7)^9$ по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу $u=2x+7$, умноженной на производную промежуточного аргумента $u=2x+7$ по x:

$$y'=\left[(2x+7)^9\right]'=9(2x+7)^8\cdot(2x+7)'=$$
$$=9(2x+7)^8\cdot(2\cdot 1+0)=18(2x+7)^8.$$

5. $\boldsymbol{y=\sin^4(3x+1)}$**.**

Здесь функция $\sin(3x+1)$ возводится в четвертую степень. Полагая (мысленно) $u=\sin(3x+1)$, найдем:

$$y'=\left[\sin^4(3x+1)\right]'=4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\left[\sin(3x+1)\right]'=$$
$$=4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot(3x+1)'=$$
$$=12\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1).$$

Задача 4. Тело движется прямолинейно по закону $s=t^3-2t^2+4t-1$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найти скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения тела равна производной от пути s по времени t: $\upsilon(t)=s'(t)$. Ускорение движения равно второй производной от пути s по времени t: $a(t)=s''(t)$. Найдем скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения (в момент времени $t_0=3$ с):

$$\upsilon(t)=s'(t)=(t^3-2t^2+4t-1)'=3t^2-4t+4,$$
$$\upsilon(t_0)=\upsilon(3)=3\cdot 3^2-4\cdot 3+4=19 \text{ (м/с)}.$$

$$a(t)=s''(t)=[\upsilon(t)]'=(3t^2-4t+4)'=6t-4,$$

$a(t_0) = a(3) = 6\cdot 3 - 4 = 14$ (м/с^2).

Ответ: $\upsilon(t_0) = 19$ (м/с), $a(t_0) = 14$ (м/с^2).

Задача 5. Найти частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$.

1. $\boldsymbol{z = x^2 + y^2 \cos x}$**.**

Найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$z'_x = (x^2 + y^3 \cos x)'_x = (x^2)'_x + (y^3 \cos x)'_x =$$

$$= (x^2)'_x + y^3 (\cos x)'_x = 2x + y^3(-\sin x) = 2x - y^3 \sin x .$$

Здесь применили два правила нахождения производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' ,$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u' , \quad \text{где } C = \text{const} .$$

Найдем частную производную по y, рассматривая x как постоянную величину:

$$z'_y = (x^2 + y^3 \cos x)'_y = (x^2)'_y + (y^3 \cos x)'_y =$$

$$= (x^2)'_y + \cos x\,(y^3)'_y = 0 + \cos x \cdot 3y^2 = 3y^2 \cos x .$$

Здесь, кроме тех же двух правил нахождения производных, применили и правило

$$(C)' = 0 , \quad \text{где } C = \text{const} :$$

т. к. переменную x рассматриваем как постоянную, то $(x^2)'_y = 0$.

2. $\boldsymbol{z = \cos(2x + y^2)}$**.**

Данная функция является сложной функцией. Здесь применим правило нахождения производной сложной функции.

Найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$(\cos(2x + y^2))'_x = -\sin(2x + y^2) \cdot (2x + y^2)'_x =$$

$$= -\sin(2x+y^2)\cdot((2x)'_x + ((y^2)'_x) = -\sin(2x+y^2)\cdot(2+0) =$$

$$= -2\sin(2x+y^2).$$

Найдем частную производную по y, рассматривая x как постоянную величину:

$$(\cos(2x+y^2))'_y = -\sin(2x+y^2)\cdot(2x+y^2)'_y =$$

$$= -\sin(2x+y^2)\cdot((2x)'_y + ((y^2)'_y) = -\sin(2x+y^2)\cdot(0+2y) =$$

$$= -2y\sin(2x+y^2).$$

Задача 6. Найти все частные производные второго порядка от функции $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + 10y.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3x^2 - 8xy)'_x = 6x - 8y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3x^2 - 8xy)'_y = -8x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_y = 10,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_x = -8x.$$

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области D: $x \ge 1$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.

Решение. Область D представляет собой треугольник, заштрихованный на рис. 6.

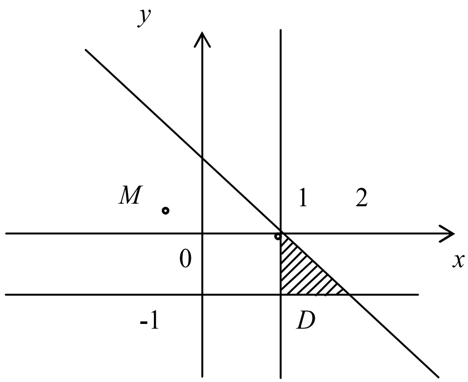


Рис. 6.

1. Найдем критические точки, принадлежащие области D, и вычислим значения функции в этих точках.

$$z'_x = 2x + 1, \qquad z'_y = 6y - 1,$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/6 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) \notin D.$$

2. Исследуем функцию на границах области.

• При $x = 1$ данная функция принимает вид:

$$z = 3y^2 - y + 2.$$

Задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке $[-1;\,0]$:

$$z' = 6y - 1,$$
$$6y - 1 = 0,$$
$$y = \frac{1}{6} \notin [-1;\,0].$$

Найдем значения функции на концах отрезка $[-1;\,0]$:

$$z(-1) = 6, \qquad z(0) = 2.$$

• При $y = -1$ имеем: $z = x^2 + x + 4$, $x \in [1;\,2]$,

$z' = 2x + 1 = 0$, $\quad x = -\dfrac{1}{2} \notin [1;\,2]$, $\quad z(1) = 6$, $\quad z(2) = 10$.

• При $y = 1 - x$ имеем: $z = 4x^2 + 2 - 4x$, $x \in [1;\,2]$,

$z' = 8x - 4 = 0$, $\quad x = \dfrac{1}{2} \notin [1;\,2]$, $\quad z(1) = 2$, $\quad z(2) = 10$.

3. Из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб.}} = 10 \text{ в точке } (2\,;-1),$$
$$z_{\text{наим.}} = 2 \text{ в точке } (1;\,0).$$

***Ответ*:** $z_{\text{наиб.}} = z(2;\,-1) = 10$, $\quad z_{\text{наим.}} = z(1;\,0) = 2$.

III. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольную работу надо выполнять в тетради, на обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название контрольной работы.

2. В работу должны быть включены все задачи Вашего варианта в указанном порядке. Например, Ваш шифр 431–007, тогда, номер Вашего варианта 7, номера задач: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67 (см. таблицу).

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Номера задач контрольной работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

3. Перед решением каждой задачи надо переписать полностью ее условие. Переписывая условие задачи следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

4. Решение задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1–10. Изобразите схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей указанным условиям.

1.

$D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$,
$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$,
$f(0) = 4, \quad f(3) = 0.$

2.

$D(y) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$,
$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$,
$f(0) = 1.$

3.

$D(y) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,
$\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = -\infty$,
$f(0) = 2, \quad f(5) = 0.$

4.

$D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$,
$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$,
$f(0) = 0.$

5.

$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,
$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$,
$f(0) = -2.$

6.

$D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$,
$f(0) = 3.$

7.

$D(y)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$,

$f(0)=0,\quad f(4)=0$.

8.

$D(y)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$,

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=+\infty$,

$f(0)=3$.

9.

$D(y)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$,

$f(0)=0$.

10.

$D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$,

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$,

$f(0)=5,\quad f(2)=0$.

11–20. Найдите указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

11. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

12. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

13. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

14. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x-2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x-2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

15. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{2x^2}$.

16. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-14}{4-x^2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-14}{4-x^2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4x}$.

17. *а*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+2x^2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+2x^2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty} x\bigl(\ln(x-3)-\ln x\bigr)$.

18. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2-4x-6}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2-4x-6}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1}{2x}}$..

19. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^x$.

20. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg}3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{5}{x}}$.

21–30. Найдите производную функции $y=f(x)$.

21. *а*) $y=-2x^3+6x^7\cdot 7^x-5$, *б*) $y=\ln^3(5-3x)$.

22. *а*) $y=\dfrac{1}{3}x^3-e^x\cdot x^4+11$, *б*) $y=\lg^3(4-5x)$.

23. *а*) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^{10}\cdot\lg x+1$, *б*) $y=(5+2x)^5$.

24. *а*) $y=4+4x^5\cdot\log_5 x-4x^3$, *б*) $y=\cos^3(3-2x)$.

25. *а*) $y=-4x^3+\dfrac{1}{5}x^2\cdot\arccos x-\dfrac{1}{5}$, *б*) $y=\arcsin^3(1-4x)$.

26. *а*) $y = -1 + \frac{1}{2}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{3}x^3$, *б*) $y = \mathrm{ctg}^3(2 - 2x)$.

27. *а*) $y = 10x^3 - 3^x \cdot x^3 + 10$, *б*) $y = \mathrm{arcctg}^3(1 - 6x)$.

28. *а*) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x \cdot \arcsin x + 1$, *б*) $y = \sin^3(4 - 3x)$.

29. *а*) $y = 2x^3 + \frac{1}{4}x^2 \cdot e^x - 7$, *б*) $y = \arccos^3(3 - 5x)$.

30. *а*) $y = \frac{1}{4} + 3\,\mathrm{arctg}\,x \cdot x^6 - x^3$, *б*) $y = \mathrm{arctg}^3(5 - 6x)$.

31–40. Тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найдите скорость и ускорение движения тела через две секунды после начала движения.

31. $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$.

32. $s = 2t^3 - t^2 + 1$.

33. $s = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5$.

34. $s = 4t^3 - 2t^2 + t$.

35. $s = 3t^3 - t + 1$.

36. $s = 2t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t$.

37. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$.

38. $s = 4t^3 + t - 1$.

39. $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t^2 - 1$.

40. $s = 5t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1$.

41–50. Исследуйте функцию и постройте ее график.

41. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

42. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

43. $y = -\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

44. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

45. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

46. $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$.

47. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

48. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

49. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

50. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

51–60. Найдите все частные производные первого и второго порядков функции $z = f(x, y)$.

51. $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$.

52. $z = y \ln x - x \ln y$.

53. $z = x^2 y + y^2 x$.

54. $z = (xy)^2$.

55. $z = \sin(x - y)$.

56. $z = 2x^3 y^2$.

57. $z = y^3 + 4xy^2$.

58. $z = \cos xy$.

59. $z = e^{x+y}$.

60. $z = \ln(xy)$.

61–70. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств. Сделайте чертеж области *D*.

61. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$, $\quad D$: $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 3$.

62. $z = x^2 + 2y^2 + 1$, D: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x + y \le 3$.

63. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, D: $x \le 1$; $y \ge 0$; $y \le x$.

64. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D: $x \ge 1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1$.

65. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, D: $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

66. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, D: $x \ge -1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1$.

67. $z = 10 + 2xy - x^2$, D: $0 \le y \le 4 - x^2$.

68. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, D: $x \le 0$; $y \le 0$; $x + y + 2 \ge 0$.

69. $z = x^2 + xy - 2$, D: $4x^2 - 4 \le y \le 0$.

71–80. Найдите градиент функции $z = f(x, y)$ в точке A. Найдите производную функции $z = f(x, y)$ в точке A по направлению вектора $\overline{AB}$.

71. $z = 2x^2 + xy$, $A(-1, 2)$; $B(2, 6)$.

72. $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1, 1)$; $B(3, 0)$.

73. $z = x^3 y + xy^2$, $A(1, 3)$; $B(-4, 15)$.

74. $z = 3x^4 + 2x^2 y^3$, $A(2, 2)$; $B(-1, 4)$.

75. $z = x^2 + xy$, $A(2, -1)$; $B(-3, 8)$.

76. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, $A(1, 3)$; $B(-3, -5)$.

77. $z = 3x^2 y^2 + 5y^2$, $A(1, 2)$; $B(4, -2)$.

78. $z = x^2 + 2y^2 + 1$, $A(-3, 8)$; $B(7, -2)$.

79. $z = x^2 y + xy^2$, $A(1, 1)$; $B(7, -7)$.

80. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2, 3)$; $B(6, 6)$.

V. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Функции одной переменной. Предел и непрерывность

1. Что называют функцией одной независимой переменной? Что называют ее областью определения и областью значений?

2. Что значит задать функцию? Какие способы задания функции знаете? Укажите особенности, достоинства и недостатки каждого из способов.

3. Перечислите основные элементарные функции.

4. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.

5. Какую функцию называют неявной? Приведите примеры неявных функций.

6. Какую функцию называют четной (нечетной)? Какова особенность графиков четных и нечетных функций?

7. Какую функцию называют возрастающей (убывающей) в интервале? Что называют интервалом монотонности функции? Какие простейшие элементарные функции являются монотонными?

8. Какие функции называют взаимно обратными? Как построить график обратной функции по графику данной функции в системе декартовых координат?

9. Дайте определение ограниченной функции. Какие из простейших элементарных функций ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены и сверху, и снизу?

10. Дайте определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

11. Дайте определение односторонних пределов функции: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

12. Дайте определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

13. Дайте определение предела числовой последовательности. Приведите примеры последовательностей, имеющих и не имеющих пределы.

14. Какую функцию называют бесконечно большой величиной при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Приведите геометрические иллюстрации для случаев, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

15. Какую функцию называют бесконечно малой величиной при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Приведите геометрические иллюстрации.

16. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами? Докажите соответствующую теорему.

17. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной? Докажите соответствующие прямую и обратную теоремы.

18. Сформулируйте и докажите правила предельного перехода в случае арифметических действий.

19. Выведите первый замечательный предел.

20. Выведите второй замечательный предел.

21. Дайте определение непрерывной в точке x_0 функции. Приведите геометрические иллюстрации.

22. Что называют точкой разрыва функции? Приведите примеры разрывных функций различного характера.

23. В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции? Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной, составленной непрерывных функций.

24. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке. Дайте геометрическую иллюстрацию этих свойств.

25. Что значит сравнить бесконечно малые величины? В каком случае одна из них будет более высокого порядка малости, чем другая?

26. Какие две бесконечно малые величины называют эквивалентными? Сформулируйте необходимый и достаточный признак эквивалентности. Приведите примеры эквивалентных бесконечно малых величин.

Производная функции одной переменной

1. Сформулируйте определение производной, ее механический и геометрический смыслы.

2. Выведите формулы производной суммы, произведения и частного двух функций. Приведите примеры.

3. Выведите формулу дифференцирования тригонометрических и логарифмических функций.

4. Выведите формулу дифференцирования сложной функции. Приведите примеры.

5. Сформулируйте правило логарифмического дифференцирования.

6. Выведите формулы дифференцирования степенной функции с любым действительным показателем, показательной функции, сложной показательной функции.

7. Докажите теорему о производной обратной функции. Выведите формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций.

8. Сформулируйте определение дифференциала функции.

9. Для каких точек графика функции дифференциал функции больше приращения, для каких – меньше?

10. Для каких функций дифференциал равен приращению?

11. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала функции?

12. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

13. Сформулируйте определения производной и дифференциала высших порядков.

14. Сформулируйте механический смысл второй производной.

15. Как находятся первая и вторая производные функции, заданной параметрически?

16. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

17. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенного выражения вида $\frac{0}{0}$. Перечислите различные типы неопределенных выражений, для раскрытия которых может быть применено правило Лопиталя.

18. Сформулируйте определения возрастающей и убывающей на отрезке функции. Выведите достаточный признак возрастания функции.

19. Сформулируйте определение точки экстремума в любом промежутке. Покажите, что функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в любом промежутке.

20. Приведите пример, показывающий, что обращение в некоторой точке производной в нуль не является достаточным условием наличия в этой точке экстремума функции.

21. Сформулируйте первое и второе достаточные условия экстремума функции.

22. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке? Всегда ли они существуют?

23. Сформулируйте определения выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба кривой. Как находятся интервалы вы-

пуклости и вогнутости и точки перегиба кривой, заданной уравнением $y = f\left(x\right)$? Приведите примеры.

24. Сформулируйте определение асимптоты кривой. Как находят вертикальные и наклонные асимптоты линии, заданной уравнением $y = f\left(x\right)$? Приведите примеры.

25. Изложите схему общего исследования функции и построения ее графика.

Функции нескольких переменных

1. Что называется функцией двух переменных? Дайте геометрическое толкование области определения и области значений функции двух переменных.

2. Что называется функцией трех переменных? Как можно геометрически толковать область определения функции трех переменных?

3. Что называется пределом функции двух переменных в точке? В каком случае эта функция называется непрерывной в точке, в области?

4. Что называется точкой разрыва функции двух переменных?

5. Как определяются частные производные функции двух переменных? Каков их геометрический смысл?

6. Когда функция $z = f\left(x, y\right)$ называется дифференцируемой в данной точке? Что называется полным дифференциалом этой функции в данной точке?

7. Выведите формулу применения полного дифференциала к вычислениям приближенного значения функции в точке.

8. Напишите формулу вычисления полной производной $\frac{dz}{dt}$ сложной функции двух переменных $z = f\left(x, y\right)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

9. Напишите формулы вычисления частных производных $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

10. Напишите формулы дифференцирования функций, заданных неявно: $F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.

11. Дайте определение частных производных высших порядков. Зависит ли результат дифференцирования от порядка дифференцирования по разным переменным?

12. Что называется максимумом (минимумом) функции двух переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$? Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции двух переменных.

13. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции двух переменных.

14. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области?

15. Что называется градиентом скалярного поля $u = f(x, y, z)$?

16. Что называется производной функции $u = f(x, y, z)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\bar{s}$? Запишите формулу ее вычисления.

17. Как выражается производная по направлению через градиент и единичный вектор $\bar{s}^0$? Назовите свойства градиента.

18. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности заданной: *а*) $z = f(x, y)$; *б*) $F(x, y, z) = 0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс. – 2014. – 415 с.

2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М. : Наука, 2014. – 736 с.

3. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс: учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб. : Лань, 2014. – 960 с.

4. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2015. – 460 с.

5. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко [и др.]. – М. : ОНИКС, 2014. – 816 с.

Дополнительная литература

6. Письменный, Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Г. Письменный. – М. : Айрис-пресс. – 2009. – 288 с.

7. Лесняк, Л.И. / Производная и ее приложения : учебное пособие / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 312 с.

8. Сборник задач по высшей математике / Под ред. П.Е. Дюбука и Г.И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1965. – 591 с.

9. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : ПРОФЕССИЯ, 2008. – 432 с.