Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители О.Д. Пантюхова,
Т.А. Шалыгина

Томск 2016

Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных : методические указания / Сост. О.Д. Пантюхова, Т.А. Шалыгина. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2016. – 41 с.

Рецензент к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Куницына Т.С.
Редактор к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Липатникова Я.Д.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» предназначены для студентов заочной формы обучения ТГАСУ всех направлений и профилей подготовки бакалавров, всех направлений специализаций подготовки специалистов и написаны в помощь при выполнении контрольной работы. Методические указания содержат введение, краткие теоретические сведения, разобранные типовые задачи, вопросы для самопроверки, правила выполнения и оформления контрольной работы, задания для контрольной работы и список рекомендуемой литературы.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики, протокол № 7 от 14.04.2016 г.

Срок действия с 01.09.2016
до 01.09.2020

Оригинал-макет подготовлен О.Д. Пантюховой

Подписано в печать 24.06.16.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,21. Тираж 20 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ОПП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций. Основным понятием дифференциального исчисления является понятие производной, которое определяет скорость изменения неравномерно меняющихся величин.

Основной задачей теории функций нескольких переменных является описание различных процессов в природе и производстве, когда изменение одной переменной зависит от изменения нескольких переменных.

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения ТГАСУ при выполнении контрольной работы по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных». Освоение данного раздела способствует формированию у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, например, таких как:

– ОК-1: владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

– ОК-2: умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;

– ПК-2: способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

В результате освоения раздела студент должен: знать основные понятия и определения; уметь самостоятельно использовать математический аппарат; владеть первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин.

I. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Краткие теоретические сведения

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и величина Δx такова, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции в точке x_0 и обозначают $\Delta f(x_0)$ или $\Delta y(x_0)$, т. е. по определению

$$\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (1)$$

Величину Δx называют приращением аргумента в точке x_0.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta y(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю ($\Delta x \to 0$).

Производную функции в точке x_0 обозначают

$$y'(x_0), \qquad f'(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x = x_0},$$

в произвольной точке x –

$$y'(x), \qquad f'(x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad y'_x.$$

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют дифференцируемой в точке x_0.

Если функция дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

Операцию нахождения производной от функции называют дифференцированием функции.

***Геометрический смысл производной*:** производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту k касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0:

$$f'(x_0) = k. \tag{3}$$

Уравнение касательной может быть записано в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{4}$$

***Механический смысл производной*:** производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть скорость изменения этой функции в точке x_0.

Если функция $s = s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то производная $s'(t_0)$ определяет скорость движения материальной точки в момент времени t_0:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0). \tag{5}$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 (конечную) производную $f'(x_0)$, то в точке x_0 эта функция непрерывна.

1.2. Производная сложной функции

Пусть функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ определяют сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную $y'_u = f'(u_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в точке x_0 также имеет производную, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{6}$$

Формула (6) выражает правило: *производная сложной функции* $y = f[\varphi(x)]$ *по аргументу x равна производной данной функции по промежуточному аргументу* $u = \varphi(x)$, *умноженной на производную промежуточного аргумента* $u = \varphi(x)$ *по x.*

1.3. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ во всех точках промежутка (a, b).

Если существует производная от производной $f'(x)$, то ее называют производной второго порядка (или второй производной) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из следующих символов:

$$y'', \qquad f''(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Итак, по определению

$$f''(x) = [f'(x)]'. \tag{7}$$

Производную $f'(x)$ называют производной первого порядка (или первой производной) от функции $y = f(x)$.

Аналогично определяют и обозначают производную n-го порядка.

Механический смысл второй производной. Если функция $s = s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то

$s'(t_0)$ определяет мгновенную скорость точки (скорость в момент времени t),

$s''(t)$ определяет скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки в момент времени t:

$$s'(t) = \upsilon(t). \tag{8}$$

$$s''(t) = \upsilon'(t) = a(t). \tag{9}$$

2. Решение задач

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}, \qquad \lambda \neq 0.$

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a, \qquad a > 0$ и $a \neq 1.$

3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a > 0$ и $a \neq 1.$

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

6. $(\sin x)' = \cos x.$

7. $(\cos x)' = -\sin x.$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Основные правила нахождения производных

Пусть C – постоянная величина, $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1. $(C)' = 0$.

2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$.

3. $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$.

4. $(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + \upsilon' \cdot u$.

5. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$.

Таблицу производных и правила нахождения производных называют соответственно формулами и правилами дифференцирования.

Задача 1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$.

1. $\boldsymbol{y = 7x^2 + 3x - 2}$.

Данная функция представляет собой алгебраическую сумму функций. Применяя правило нахождения производной алгебраической суммы (3), затем – правило дифференцирования (2), затем – формулу дифференцирования (1) и правило дифференцирования (1), получим:

$$y' = \left(7x^2 + 3x - 2\right)' = \left(7x^2\right)' + (3x)' - (2)' =$$

$$= 7 \cdot \left(x^2\right)' + 3 \cdot (x)' - (2)' = 14x + 3 \cdot 1 = 14x + 3.$$

2. $\boldsymbol{y = x^3 \cdot \mathrm{ctg}x}$ **.**

Данная функция представляет собой произведение функций x^3 и $\mathrm{ctg}x$. Применяя правило дифференцирования (4), а затем – формулы дифференцирования (1) и (9), получим:

$$y' = \left(x^3 \cdot \mathrm{ctg}x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{ctg}x + (\mathrm{ctg}x)' \cdot x^3 =$$

$$= 3x^2 \cdot \mathrm{ctg}x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot x^3 = 3x^2 \cdot \mathrm{ctg}x - \frac{x^3}{\sin^2 x}.$$

3. $\boldsymbol{y = \dfrac{-7x^2}{x^2+7}}$ **.**

Данная функция представляет собой дробь. Предварительно вынесем постоянный множитель -7 за знак производной (правило дифференцирования (2)), и применим правила дифференцирования (5), затем (3) и (1) и формулу дифференцирования (1). Получим:

$$y' = \left(\frac{-7x^2}{x^2+7}\right)' = -7 \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+7}\right)' =$$

$$= -7 \cdot \frac{\left(x^2\right)' \cdot \left(x^2+7\right) - \left(x^2+7\right)' \cdot \left(x^2\right)}{\left(x^2+7\right)^2} =$$

$$= -7 \cdot \frac{\left(x^2\right)' \cdot \left(x^2+7\right) - \left[\left(x^2\right)' + (7)'\right] \cdot x^2}{\left(x^2+7\right)^2} =$$

$$= -7 \cdot \frac{2x \cdot \left(x^2+7\right) - 2x^3}{\left(x^2+7\right)^2} = -7 \cdot \frac{14x}{\left(x^2+7\right)^2}.$$

Задача 2. Найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции.

Таблица общих формул дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ – функция, имеющая производную.

1*u*. $\left(u^{\lambda}\right)' = \lambda\, x^{\lambda-1} \cdot u'$, $\quad \lambda \neq 0$.

2*u*. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$, $\quad a > 0$ и $a \neq 1$.

3*u*. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$.

4*u*. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $\quad a > 0$ и $a \neq 1$.

5*u*. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

6*u*. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

7*u*. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

8*u*. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

9*u*. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

10*u*. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11*u*. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

12*u*. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

13*u*. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Формулы (1) – (13) таблицы производных основных элементарных функций являются частным случаем соответствующих формул (1u) – (13u) таблицы общих формул дифференцирования при $u = x$ и, следовательно, $u' = 1$.

1. $\boldsymbol{y = (2x + 7)^9}$ **.**

Данная функция является сложной функцией. Ее можно представить как функцию от функции следующим образом:

$$y = u^9, \qquad\qquad u = 2x + 7.$$

Применяя формулу дифференцирования (1) и правила дифференцирования (3) и (2), найдем y'_u и u'_x:

$$y'_u = \left(u^9\right)'_u = 9u^8,$$

$$u'_x = (2x + 7)'_x = 2\cdot 1 + 0 = 2.$$

По правилу нахождения производной сложной функции (8) получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 9u^8 \cdot 2 = 9(2x + 7)^8 \cdot 2 = 18(2x + 7)^8.$$

Другими словами, по правилу нахождения производной сложной функции имеем: производная сложной функции $y = (2x + 7)^9$ по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу $u = 2x + 7$, умноженной на производную промежуточного аргумента $u = 2x + 7$ по x.

Применяя формулу дифференцирования (1u), получим:

$$y' = \left[(2x + 7)^9\right]' = 9(2x + 7)^8 \cdot (2x + 7)' =$$
$$= 9(2x + 7)^8 \cdot (2\cdot 1 + 0) = 18(2x + 7)^8.$$

2. $\boldsymbol{y = \cos(7x - 4)}$.

Здесь промежуточным аргументом является функция $u = 7x - 4$. Применяя формулу дифференцирования (7*u*), получим:

$$y' = [\cos(7x-4)]' = -\sin(7x-4)\cdot(7x-4)' =$$
$$= -\sin(7x-4)\cdot(7\cdot 1 - 0) = -7\sin(7x-4).$$

3. $\boldsymbol{y = \sin^4(3x+1)}$.

Здесь функция $\sin(3x+1)$ возводится в четвертую степень. Поэтому для данной функции $y = \sin^4(3x+1)$ промежуточным аргументом будет $u = \sin(3x+1)$. Но функция $u = \sin(3x+1)$ сама является сложной функцией с промежуточным аргументом $\upsilon = 3x+1$. Таким образом, данную функцию $y = \sin^4(3x+1)$ можно представить в виде:

$$y = u^4, \qquad u = \sin\upsilon, \qquad \upsilon = 3x+1.$$

Применяя формулы дифференцирования (1), (6) и правила дифференцирования (3), (2), найдем y'_u и u'_υ, υ'_x:

$$y'_u = \left(u^4\right)'_u = 4u^3,$$
$$u'_\upsilon = (\sin\upsilon)'_\upsilon = \cos\upsilon,$$
$$\upsilon'_x = (3x+1)'_x = 3\cdot 1 + 0 = 3.$$

По правилу нахождения производной сложной функции получим:

$$y'_x = y'_u\cdot u'_\upsilon\cdot \upsilon'_x = 4u^3\cdot\cos\upsilon\cdot 3 = 4(\sin\upsilon)^3\cdot\cos\upsilon\cdot 3 =$$
$$= 4[\sin(3x+1)]^3\cdot\cos(3x+1)\cdot 3 =$$
$$= 12\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1).$$

Короче: полагая (мысленно) $u=\sin(3x+1)$, по формуле дифференцирования (1u) найдем:

$$y'=\left[\sin^4(3x+1)\right]'=4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot[\sin(3x+1)]'=$$
$$=4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot(3x+1)'=$$
$$=4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot(3\cdot1+0)=$$
$$=12\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1).$$

Задача 3. Найти уравнение касательной к графику функции $\boldsymbol{y=x^2-4x}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x_0=1}$. Построить кривую и касательную.

Решение. Уравнение касательной графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

где k – угловой коэффициент, $k=f'(x_0)$.

По условию задачи абсцисса точки касания (точки M_0) задана: $x_0=1$. Найдем y_0. Для этого значение $x_0=1$ подставим в уравнение кривой $y=x^2-4x$, получим $y_0=-3$.

Найдем угловой коэффициент $k=f'(x_0)$ искомой касательной. Для этого сначала найдем производную $f'(x)$, а затем – ее значение в точке x_0:

$$f'(x)=\left(x^2-4x\right)'=2x-4,$$
$$f'(x_0)=f'(1)=2\cdot1-4=-2,$$
$$k=f'(x_0)=f'(1)=-2.$$

Подставляя значения x_0, y_0, k в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, получим уравнение искомой касательной:

$$y+3=-2(x-1) \text{ или } y=-2x-1.$$

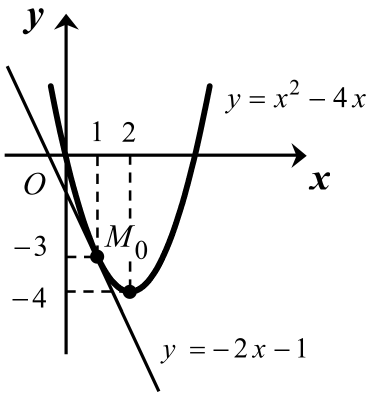

Рис. 1.

Уравнение $y = x^2 - 4x$ может быть записано в виде $y + 4 = (x - 2)^2$. Данное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2, -4)$. Парабола и касательная к параболе в точке $M_0(1, -3)$ приведены на рис. 1.

Ответ: $y = -2x - 1$.

Задача 4. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 2t^2 + 4t - 1$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найти скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения тела равна производной от пути s по времени *t*: $\upsilon(t) = s'(t)$. Ускорение движения равно второй производной от пути s по времени *t*: $a(t) = s''(t)$. Найдем скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения (в момент времени $t_0 = 3$ с):

$$\upsilon(t) = s'(t) = \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 1\right)' = 3t^2 - 4t + 4,$$

$$\upsilon(t_0) = \upsilon(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 19 \text{ (м/с)}.$$

$$a(t) = s''(t) = [\upsilon(t)]' = \left(3t^2 - 4t + 4\right)' = 6t - 4,$$

$$a(t_0) = a(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $\upsilon(t_0) = 19$ (м/с), $a(t_0) = 14$ (м/с^2).

Задача 5. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Подробное изложение теоретического материала к задаче 5 читатель найдет в работах [1, 2, 5], подробно разобранную задачу 5 – в работе [9], подробно разобранные задачи, аналогичные задаче 5 – в работах [3, 4, 6, 7]. Здесь ограничимся тем, что приведем схему исследования функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.

3. Выяснить вопрос о существовании асимптот.

4. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

5. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции; определить точки перегиба.

6. Найти, в случае необходимости, координаты дополнительных точек графика функции (в частности, координаты точек пересечения с осями координат).

7. Используя результаты исследования, построить график функции.

II. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Краткие теоретические сведения

1.1. Понятие функции нескольких переменных

Каждой паре значений x и y на плоскости Oxy соответствует некоторая точка $M(x, y)$. Возьмем некоторое множество точек на плоскости Oxy и обозначим его через D.

Переменную величину z называют ***функцией двух независимых переменных x и y*** на множестве D, если каждой точке этого множества по некоторому закону соответствует единственное значение величины z.

Записывают

$$z = f(x, y).$$

Множество точек D называют областью определения или областью задания функции z.

Функцию двух переменных, как и функцию одной переменной, можно задать таблично, аналитически и графически.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ (в системе декартовых прямоугольных координат) называют множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты – соответствующими значениями z.

В общем случае графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность. Проекция этой поверхности на плоскость Oxy есть область определения функции, а на ось Oz – область ее значений.

Переменную величину u называют ***функцией n независимых переменных*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой системе значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по некоторому закону соответствует единственное значение величины u.

Записывают

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функцию трех и более переменных задать графически невозможно. Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ геометрически можно представить только ее область определения: в виде части трехмерного пространства.

1.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Число A называют ***пределом*** функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся соответственно от чисел x_0 и y_0, соответствующие значения $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа A.

Записывают

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Функцию $z = f(x, y)$ называют ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, если:

1) $f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) этот предел равен значению функции в предельной точке

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Если хотя бы одно из трех условий не выполняется, то точку $M_0(x_0, y_0)$ называют ***точкой разрыва*** функции $z = f(x, y)$.

Функцию $z = f(x, y)$ называют ***непрерывной в некоторой области***, если она непрерывна в каждой точке этой области.

1.3. Частные производные

Пусть в некоторой области D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Выберем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ и дадим x_0 приращение Δx, а y_0 оставим неизменным. Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое ***частным приращением по x в точке*** $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0).$$

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$.

Частную производную по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad z'_x(M_0), \qquad f'_x(x_0, y_0),$$

в произвольной точке $M(x, y)$ –

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad z'_x, \qquad f'_x(x, y).$$

Итак, по определению

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная функции $z = f(x, y)$ по y:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные функций трех или более переменных определяются и обозначаются аналогично.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных, при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Поэтому частные производные функции нескольких переменных находят по формулам и правилам, по которым находят производную функции одной переменной.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$f'_x(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент относительно оси *Ox*, касательной в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, т. е. $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$;

$f'_y(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент относительно оси *Oy*, касательной в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$, т. е. $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Механический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$: $f'_x(x_0, y_0)$ определяет скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении оси *Ox*, $f'_y(x_0, y_0)$ − в направлении оси *Oy*.

1.4. Частные производные высших порядков

Частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ от функции $z = f(x, y)$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции двух переменных *x* и *y*. Эти функции могут иметь частные производные по *x* и по *y*, которые называют частными производными второго порядка. Их определяют и обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называют ***смешанными***.

Теорема. Если вторые смешанные производные функции $z=f(x,y)$ непрерывны, то они равны между собой:

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Частные производные высших порядков для функций любого числа независимых переменных определяются и обозначаются аналогично. Остается в силе и теорема о независимости смешанных частных производных от последовательности дифференцирования при условии их непрерывности.

1.5. Производные сложных функций

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$. Тогда $z=f\,(x(t),\,y(t))$ − сложная функция независимой переменной *t*; переменные *x* и *y* будут для нее промежуточными.

Теорема. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке *t*, а функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, то сложная функция $z=f\,(x(t),\,y(t))$ также дифференцируема в точке *t*, причем в этой точке

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Частный случай.

Пусть $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$. Тогда $z = f(x, y(x))$ − сложная функция одной независимой переменной x.

Имеем

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Эту формулу называют формулой полной производной.

Общий случай.

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда $z = f(x(u, v), y(u, v))$ − сложная функция независимых переменных u и v.

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

1.6. Дифференцирование неявных функций

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как некоторую функцию $y = \varphi(x)$ независимой переменной x.

Можно показать, что

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как некоторую функцию $z = \varphi(x, y)$ независимых переменных x и y.

Можно показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

При $F'_z = 0$ эти формулы теряют смысл.

1.7. Экстремум функции двух переменных

Точку $M_0(x_0, y_0)$ называют точкой максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если в некоторой окрестности этой точки для всех точек $M(x, y)$ выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$
$$\big(f(x_0, y_0) < f(x, y)\big).$$

При этом значение $f(x_0, y_0)$ называют максимумом (минимумом) функции.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции, а максимум и минимум функции – экстремумом функции или экстремальным значением функции.

Понятие экстремума функции носит локальный характер.

Необходимые условия существования экстремума.

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю,

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Точку $M_0(x_0, y_0)$, в которой выполняются эти условия, называют точкой возможного экстремума (а также стационарной или критической).

Достаточные условия существования экстремума.

Пусть в критической точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $M_0(x_0, y_0)$ значения

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \qquad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Пусть число Δ определяется следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 .$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум:

  а) максимум, если $A < 0$,

  б) минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $\Delta = 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ может иметь экстремум, а может и не иметь. Требуются дополнительные исследования.

1.8. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда в области *D* она достигает своих наибольшего и наименьшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области *D*, либо на ее границе.

Правило. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной в области *D* функции $z = f(x, y)$, поступают следующим образом.

1. Находят критические точки, принадлежащие области *D* и вычисляют значения функции в этих точках.

2. Находят наибольшее и наименьшее значения функции на границах области *D*.

3. Выбирают из полученных значений функции наибольшее и наименьшее.

2. Решение задач

Задача 1. Найти частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$.

1. $\boldsymbol{z = x^2 + y^2 \cos x}$ **.**

Найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$z'_x = (x^2 + y^3 \cos x)'_x = (x^2)'_x + (y^3 \cos x)'_x =$$

$$= (x^2)'_x + y^3 (\cos x)'_x = 2x + y^3(-\sin x) = 2x - y^3 \sin x \,.$$

Здесь применили два правила нахождения производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \,,$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u' \,, \quad \text{где } C = \text{const} \,.$$

Найдем частную производную по y, рассматривая x как постоянную величину:

$$z'_y = (x^2 + y^3 \cos x)'_y = (x^2)'_y + (y^3 \cos x)'_y =$$

$$= (x^2)'_y + \cos x\, (y^3)'_y = 0 + \cos x \cdot 3y^2 = 3y^2 \cos x \,.$$

Здесь, кроме тех же двух правил нахождения производных, применили и правило

$$(C)' = 0 \,, \quad \text{где } C = \text{const} :$$

т. к. переменную x рассматриваем как постоянную, то $(x^2)'_y = 0$.

2. $\boldsymbol{z = \cos(2x + y^2)}$ **.**

Данная функция является сложной функцией. Здесь применим правило нахождения производной сложной функции.

Найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$(\cos(2x + y^2))'_x = -\sin(2x + y^2) \cdot (2x + y^2)'_x =$$

$$= -\sin(2x + y^2) \cdot ((2x)'_x + ((y^2)'_x) = -\sin(2x + y^2) \cdot (2 + 0) =$$

$$= -2\sin(2x + y^2) \,.$$

Найдем частную производную по y, рассматривая x как постоянную величину:

$$(\cos(2x+y^2))'_y = -\sin(2x+y^2)\cdot(2x+y^2)'_y =$$

$$= -\sin(2x+y^2)\cdot((2x)'_y + ((y^2)'_y) = -\sin(2x+y^2)\cdot(0+2y) =$$

$$= -2y\sin(2x+y^2)\,.$$

Задача 2. Найти частные производные функции трех переменных $\boldsymbol{u = 2x + 3y - 4z + x^4 y^3 z^2}$.

Найдем частную производную по переменной x, считая y и z постоянными величинами:

$$u'_x = 2 + 4x^3 y^3 z^2\,.$$

Найдем частную производную по переменной y, считая x и z постоянными величинами:

$$u'_y = 3 + 3x^4 y^2 z^2\,.$$

Найдем частную производную по переменной z, считая x и y постоянными величинами:

$$u'_z = -4 + 2x^4 y^3 z\,.$$

Задача 3. Найти производную функции y по x, заданной неявно:

$$\boldsymbol{xy - \ln y = 1}\,.$$

Искомая производная $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$;

$$F'_x = y; \qquad F'_y = x - \frac{1}{y}\,.$$

Имеем: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x-\frac{1}{y}} = -\frac{y^2}{xy-1} = \frac{y^2}{1-xy};$$

Задача 4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, где $x = 2u + v$, $y = u - 3v$.

Искомые частные производные найдем по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2y^2}\cdot y, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = 2, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2y^2}\cdot x, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -3.$$

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{1+x^2y^2}\cdot 2 + \frac{x}{1+x^2y^2}\cdot 1 = \frac{2y+x}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{1+x^2y^2}\cdot 1 + \frac{x}{1+x^2y^2}\cdot(-3) = \frac{y-3x}{1+x^2y^2}.$$

Задача 5. Найти все частные производные второго порядка от функции $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + 10y.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3x^2 - 8xy)'_x = 6x - 8y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3x^2 - 8xy)'_y = -8x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_y = 10,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_x = -8x.$$

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области D: $x \geq 1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$.

Решение. Область D представляет собой треугольник, заштрихованный на рис. 1.

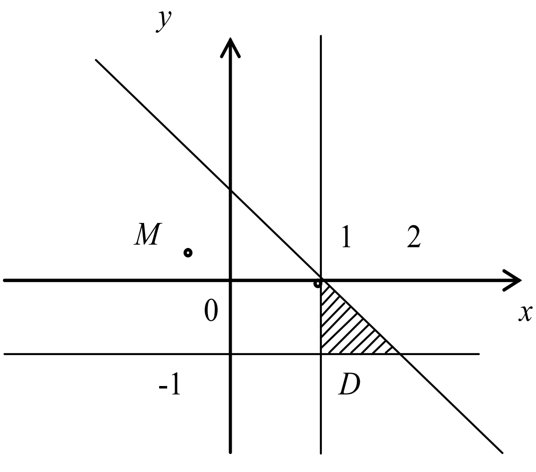

Рис. 1.

1. Найдем критические точки, принадлежащие области D, и вычислим значения функции в этих точках.

$$z'_x = 2x + 1, \qquad z'_y = 6y - 1,$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/6 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) \notin D.$$

2. Исследуем функцию на границах области.

• При $x = 1$ данная функция принимает вид:

$$z = 3y^2 - y + 2.$$

Задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке $[-1; 0]$:

$$z' = 6y - 1,$$
$$6y - 1 = 0,$$
$$y = \frac{1}{6} \notin [-1; 0].$$

Найдем значения функции на концах отрезка $[-1; 0]$:

$$z(-1) = 6, \qquad z(0) = 2.$$

• При $y = -1$ имеем: $z = x^2 + x + 4$, $x \in [1; 2]$,

$$z' = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} \notin [1; 2], \quad z(1) = 6, \quad z(2) = 10.$$

• При $y = 1 - x$ имеем: $z = 4x^2 + 2 - 4x$, $x \in [1; 2]$,

$$z' = 8x - 4 = 0, \quad x = \frac{1}{2} \notin [1; 2], \quad z(1) = 2, \quad z(2) = 10.$$

3. Из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб.}} = 10 \text{ в точке } (2; -1),$$
$$z_{\text{наим.}} = 2 \text{ в точке } (1; 0).$$

***Ответ*:** $z_{\text{наиб.}} = z(2; -1) = 10, \quad z_{\text{наим.}} = z(1; 0) = 2.$

III. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольную работу надо выполнять в тетради, на обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название контрольной работы.

2. В работу должны быть включены все задачи Вашего варианта в указанном порядке. Например, Ваш шифр 431–007, тогда, номер Вашего варианта 7, номера задач: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67 (см. таблицу).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номера задач контрольной работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

3. Перед решением каждой задачи надо переписать полностью ее условие. Переписывая условие задачи следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

4. Решение задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1–10. Найдите производную функции.

1. *а*) $y = -2x^3 + 6x - 5$, *г*) $y = (1 + 5x)^5$,

б) $y = x^7 \cdot 7^x$, *д*) $y = e^{-2x}$,

в) $y = \dfrac{2x^2}{1 - 3x}$, *е*) $y = \ln^3(5 - 3x)$.

2. *а*) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 11$, *г*) $y = (2 + 3x)^5$,

б) $y = e^x \cdot x^4$, *д*) $y = \arcsin 3x$,

в) $y = \dfrac{-4x}{x^2 + 1}$, *е*) $y = \lg^3(4 - 5x)$.

3. *а*) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x + 1$, *г*) $y = (5 + 2x)^5$,

б) $y = x^{10} \cdot \lg x$, *д*) $y = 4^{\sin x}$,

в) $y = \dfrac{2x^2}{4 - x^3}$, *е*) $y = \operatorname{tg}^3(2 - 5x)$.

4. *а*) $y = 4 + 4x - 4x^3$, *г*) $y = (4 + 4x)^5$,

б) $y = x^5 \cdot \log_5 x$, *д*) $y = \ln 2x$,

в) $y = \dfrac{-3x^2}{3 + x^2}$, *е*) $y = \cos^3(3 - 2x)$.

5. *а*) $y = -4x^3 + \dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{5}$, *г*) $y = (3 + 2x)^5$,

б) $y = x^2 \cdot \arccos x$, *д*) $y = \operatorname{tg} 5x$,

в) $y = \dfrac{-8x}{3x^2 + 4}$, *е*) $y = \arcsin^3(1 - 4x)$.

6. *а*) $y=-1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^3$,

б) $y=x^4\cdot\ln x$,

в) $y=\frac{-x^2}{2x^3+1}$,

г) $y=(3+6x)^5$,

д) $y=2^{\cos x}$,

е) $y=\mathrm{ctg}^3(2-2x)$.

7. *а*) $y=10x^3-5x+10$,

б) $y=3^x\cdot x^3$,

в) $y=\frac{7x}{2-2x^2}$,

г) $y=(4+5x)^5$,

д) $y=\sin 3x$,

е) $y=\mathrm{arcctg}^3(1-6x)$.

8. *а*) $y=\frac{1}{3}x^3-4x+1$,

б) $y=x\cdot\arcsin x$,

в) $y=\frac{-x^2}{1-4x}$,

г) $y=(1+6x)^5$,

д) $y=\mathrm{arctg}\,4x$,

е) $y=\sin^3(4-3x)$.

9. *а*) $y=2x^3+\frac{1}{4}x-7$,

б) $y=x^2\cdot e^x$,

в) $y=\frac{-12x}{9-x^2}$,

г) $y=(2+4x)^5$,

д) $y=\log_5 5x$,

е) $y=\arccos^3(3-5x)$.

10. *а*) $y=\frac{1}{4}+3x-x^3$,

б) $y=\mathrm{arctg}\,x\cdot x^6$,

в) $y=\frac{x^2}{1-2x^3}$,

г) $y=(5+3x)^5$,

д) $y=\mathrm{ctg}\,2x$,

е) $y=\mathrm{arctg}^3(5-6x)$.

11–20. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Постройте кривую $y = f(x)$ и касательную.

11. $y = x^2 + 1$, $x_0 = -1$.

12. $y = x^2 - 1$, $x_0 = 1$.

13. $y = -x^2 + 1$, $x_0 = 2$.

14. $y = -x^2 - 1$, $x_0 = 0$.

15. $y = -x^2 + 2$, $x_0 = -2$.

16. $y = -x^2 - 2$, $x_0 = 1$.

17. $y = x^2 - 2$, $x_0 = -1$.

18. $y = x^2 + 2$, $x_0 = 2$.

19. $y = 4 - x^2$, $x_0 = 2$.

20. $y = -x^2 + 3$, $x_0 = 0$.

21–30. Тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найдите скорость и ускорение движения тела через две секунды после начала движения.

21. $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$.

22. $s = 2t^3 - t^2 + 1$.

23. $s = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5$.

24. $s = 4t^3 - 2t^2 + t$.

25. $s = 3t^3 - t + 1$.

26. $s = 2t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t$.

27. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$.

28. $s = 4t^3 + t - 1$.

29. $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t^2 - 1$.

30. $s = 5t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1$.

31–40. Исследуйте функцию и постройте ее график.

31. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

32. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

33. $y = -\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

34. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

35. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

36. $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$.

37. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

38. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

39. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

40. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

41–50. Найдите частные производные:
***а*) функции двух переменных** $z = f(x, y)$;
***б*) функции трех переменных** $u = f(x, y, z)$;
***в*) функции, заданной неявно,** $F(x, y) = 0$;
***г*) сложной функции** $z = f(u, v)$**, где** $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

41. *а*) $z = x^2 y + xy^2$,
б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
в) $x^2 + y^2 = a^2$,
г) $z = \sin(u - 7v)$, где
$u = xy$, $v = x + y$.

46. *а*) $z = e^{xy}$,
б) $u = x \ln(yz)$,
в) $\ln y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$,
г) $z = u^2 v$, где
$u = x - y$, $v = \sin xy$.

42. *а*) $z = x + y + 2xy$,

б) $u = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$,

в) $(y)^x - (x)^y = 0$,

г) $z = e^u - e^v$, где

$u = xy$, $v = y - x^2$.

43. *а*) $z = x^2 \sin y$,

б) $u = xy^2 z$,

в) $x^2 - \sqrt{y^2 + x^2} = 0$,

г) $z = \operatorname{arctg}(uv)$, где

$u = xy$, $v = y + x^2$.

44. *а*) $z = y^2 \operatorname{tg} x$,

б) $u = x^2 yz$,

в) $\sqrt{y^2 + x^2} - \dfrac{2}{x} = 0$,

г) $z = (u + v)^3$, где

$u = x - y^2$, $v = y^2 x$.

45. *а*) $z = e^{x^2 + y^2}$,

б) $u = \ln(x + y + z^2)$,

в) $x^2 + 3y^2 + x - y = 0$,

г) $z = u^3 - uv^2$, где

$u = x\cos y$, $v = y\cos x$.

47. *а*) $z = x \cdot \cos y$,

б) $u = \sqrt{xyz}$,

в) $x - y \operatorname{tg} x = 0$,

г) $z = u^2 \ln v$, где

$u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3y - 2x$.

48. *а*) $z = y \cdot \sin x$,

б) $u = \dfrac{x\,y}{z}$,

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$,

г) $z = (u - v)^2$, где

$u = xy^3$, $v = x + y$.

49. *а*) $z = x^y$,

б) $u = xy + z$,

в) $x\cos y + y\cos x - 1 = 0$,

г) $z = \arcsin(u - v)$, где

$u = 3xy$, $v = e^{xy}$.

50. *а*) $z = y^x$,

б) $u = x + yz$,

в) $x^2 + y^2 - xy = 0$,

г) $z = u^2 + 2v^2 + 1$, где

$u = \dfrac{y}{x}$, $v = y\ln x$.

51–60. Найдите все частные производные второго порядка функции.

51. $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$.

52. $z = y \ln x - x \ln y$.

53. $z = x^2 y + y^2 x$.

54. $z = (xy)^2$.

55. $z = \sin(x - y)$.

56. $z = 2x^3 y^2$.

57. $z = y^3 + 4xy^2$.

58. $z = \cos(xy)$.

59. $z = e^{x+y}$.

60. $z = \ln(xy)$.

61–70. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств. Сделайте чертеж области *D*.

61. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$, D: $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 3$.

62. $z = x^2 + 2y^2 + 1$, D: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x + y \le 3$.

63. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, D: $x \le 1$; $y \ge 0$; $y \le x$.

64. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D: $x \ge 1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1$.

65. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, D: $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

66. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, D: $x \ge -1$; $y \ge -1$; $x + y \le 1$.

67. $z = 10 + 2xy - x^2$, D: $0 \le y \le 4 - x^2$.

68. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, D: $x \le 0$; $y \le 0$; $x + y + 2 \ge 0$.

69. $z = x^2 + xy - 2$, D: $4x^2 - 4 \le y \le 0$.

V. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Сформулируйте определение производной, ее механический и геометрический смыслы.

2. Выведите формулы производной суммы, произведения и частного двух функций. Приведите примеры.

3. Выведите формулу дифференцирования тригонометрических и логарифмических функций.

4. Выведите формулу дифференцирования сложной функции. Приведите примеры.

5. Сформулируйте правило логарифмического дифференцирования.

6. Выведите формулы дифференцирования степенной функции с любым действительным показателем, показательной функции, сложной показательной функции.

7. Докажите теорему о производной обратной функции. Выведите формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций.

8. Сформулируйте определение дифференциала функции.

9. Для каких точек графика функции дифференциал функции больше приращения, для каких – меньше?

10. Для каких функций дифференциал равен приращению?

11. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала функции?

12. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

13. Сформулируйте определения производной и дифференциала высших порядков.

14. Сформулируйте механический смысл второй производной.

15. Как находятся первая и вторая производные функции, заданной параметрически?

16. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

17. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенного выражения вида $\frac{0}{0}$. Перечислите различные типы неопределенных выражений, для раскрытия которых может быть применено правило Лопиталя.

18. Сформулируйте определения возрастающей и убывающей на отрезке функции. Выведите достаточный признак возрастания функции.

19. Сформулируйте определение точки экстремума в любом промежутке. Покажите, что функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в любом промежутке.

20. Приведите пример, показывающий, что обращение в некоторой точке производной в нуль не является достаточным условием наличия в этой точке экстремума функции.

21. Сформулируйте первое и второе достаточные условия экстремума функции.

22. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке? Всегда ли они существуют?

23. Сформулируйте определения выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба кривой. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

24. Сформулируйте определение асимптоты кривой. Как находят вертикальные и наклонные асимптоты линии, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

25. Изложите схему общего исследования функции и построения ее графика.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Что называется функцией двух переменных? Дайте геометрическое толкование области определения и области значений функции двух переменных.

2. Что называется функцией трех переменных? Как можно геометрически толковать область определения функции трех переменных?

3. Что называется пределом функции двух переменных в точке? В каком случае эта функция называется непрерывной в точке, в области?

4. Что называется точкой разрыва функции двух переменных?

5. Как определяются частные производные функции двух переменных? Каков их геометрический смысл?

6. Когда функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в данной точке? Что называется полным дифференциалом этой функции в данной точке?

7. Выведите формулу применения полного дифференциала к вычислениям приближенного значения функции в точке.

8. Напишите формулу вычисления полной производной $\frac{dz}{dt}$ сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

9. Напишите формулы вычисления частных производных $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

10. Напишите формулы дифференцирования функций, заданных неявно: $F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.

11. Дайте определение частных производных высших порядков. Зависит ли результат дифференцирования от порядка дифференцирования по разным переменным?

12. Что называется максимумом (минимумом) функции двух переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$? Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции двух переменных.

13. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции двух переменных.

14. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области?

15. Что называется градиентом скалярного поля $u = f(x, y, z)$?

16. Что называется производной функции $u = f(x, y, z)$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\bar{s}$? Запишите формулу ее вычисления.

17. Как выражается производная по направлению через градиент и единичный вектор $\bar{s}^0$? Назовите свойства градиента.

18. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности заданной: *а*) $z = f(x, y)$; *б*) $F(x, y, z) = 0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс. – 2012. – 415 с.

2. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс: учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб. : Лань, 2012. – 960 с.

3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2013. – 460 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко [и др.]. – М. : ОНИКС, 2012. – 816 с.

Дополнительная литература

5. Письменный, Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Г. Письменный. – М. : Айрис-пресс. – 2011. – 288 с.

6. Лесняк, Л.И. / Производная и ее приложения : учебное пособие / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 312 с.

7. Сборник задач по высшей математике / Под ред. П.Е. Дюбука и Г.И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1965. – 591 с.

8. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : ПРОФЕССИЯ, 2012. – 432 с.

9. Пантюхова, О.Д. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения : учебное пособие / О.Д. Пантюхова – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2008. – 100 с.

10. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : методические указания / Сост. Г.К. Гордеева, Т.А. Шалыгина, Я.Д. Фахрутдинова. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 38 с.