Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составитель О.Д. Пантюхова

Томск 2014

Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения : методические указания / Сост. О.Д. Пантюхова. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 42 с.

Рецензент к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Лазарева Р.И.
Редактор к.ф.-м. наук, доцент каф. ВМ Пантюхова О.Д.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» предназначены для студентов заочной формы обучения ТГАСУ всех направлений и профилей подготовки бакалавров, всех направлений специализаций подготовки специалистов и написаны в помощь при выполнении контрольной работы. Методические указания содержат введение, краткие теоретические сведения, разобранные типовые задачи, вопросы для самопроверки, правила выполнения и оформления контрольной работы, задания для контрольной работы и список рекомендуемой литературы.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики, протокол № 3 от 9.12.2013 г.

Срок действия с 01.09.2014
до 01.09.2019

Оригинал-макет подготовлен автором

Подписано в печать 10.04.14.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,21. Тираж 20 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ОПП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций. Основным понятием дифференциального исчисления является понятие производной, которое определяет скорость изменения неравномерно меняющихся величин.

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения ТГАСУ при выполнении контрольной работы по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения». Освоение данного раздела способствует формированию у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, например, таких как:

– ОК-1: владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

– ОК-2: умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;

– ПК-2: способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

В результате освоения раздела студент должен: знать основные понятия и определения; уметь самостоятельно использовать математический аппарат; владеть первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и величина Δx такова, что $x_0 + \Delta x$ также принадлежит интервалу (a, b). Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции в точке x_0 и обозначают $\Delta f(x_0)$ или $\Delta y(x_0)$, т. е. по определению

$$\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Величину Δx называют приращением аргумента в точке x_0.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta y(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю ($\Delta x \to 0$).

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают одним из следующих символов:

$$y'(x_0), \qquad f'(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x = x_0}.$$

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют дифференцируемой в точке x_0.

Если функция дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

Производную функции $y = f(x)$ в произвольной точке x обозначают так:

$$y'(x), \qquad f'(x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad y'_x.$$

Операцию нахождения производной от функции называют дифференцированием функции.

2. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$, определена на интервале (a, b). На графике функции $y = f(x)$ рассмотрим две точки M_0 и M (рис. 1). Через эти точки проведем прямую M_0M, называемую секущей. Угол между секущей и положительным направлением оси Ox обозначим через φ. Устремим точку M к точке M_0 по графику функции. При этом секущая M_0M будет менять свое положение и будет стремиться занять некоторое предельное положение, не зависящее от того, как («слева» или «справа») точка M приближается к точке M_0 (рис. 1).

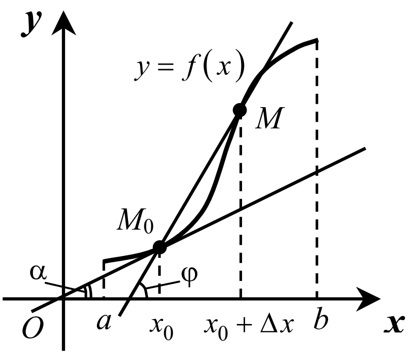

Рис. 1.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называют предельное положение секущей M_0M (если оно существует), когда точка $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ стремится по графику этой функции к точке M_0.

Обозначим через α угол между касательной и положительным направлением оси Ox (рис. 1).

***Геометрический смысл производной*:** производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту k

($k = \operatorname{tg}\alpha$) касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0:

$$f'(x_0) = k\,. \qquad (3)$$

Уравнение касательной может быть записано в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)\,. \qquad (4)$$

3. Механический смысл производной

Средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ на промежутке от x_0 до $x_0 + \Delta x$ называют отношение приращения функции $\Delta y(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx:

$$\upsilon_{cp} = \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (5)$$

Мгновенной скоростью или скоростью изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при $\Delta x \to 0$:

$$\upsilon(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0)\,. \qquad (6)$$

***Механический смысл производной*:** производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть скорость изменения этой функции в точке x_0.

Если функция $s = s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то производная $s'(t_0)$ определяет скорость движения материальной точки в момент времени t_0:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)\,. \qquad (7)$$

4. Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 (конечную) производную $f'(x_0)$, то в точке x_0 эта функция непрерывна.

5. Производная сложной функции

Пусть функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ определяют сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную $y'_u = f'(u_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в точке x_0 также имеет производную, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \,. \tag{8}$$

Формула (8) выражает правило: *производная сложной функции* $y = f[\varphi(x)]$ *по аргументу x равна производной данной функции по промежуточному аргументу* $u = \varphi(x)$*, умноженной на производную промежуточного аргумента* $u = \varphi(x)$ *по x.*

6. Производная функции, заданной параметрически

Производную от функции заданной параметрически

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t_1 \le t \le t_2,$$

находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \,. \tag{9}$$

7. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ во всех точках промежутка (a, b).

Если существует производная от производной $f'(x)$, то ее называют производной второго порядка (или второй производной) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из следующих символов:

$$y'', \qquad f''(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Итак, по определению

$$f''(x) = [f'(x)]'. \tag{10}$$

Производную $f'(x)$ называют производной первого порядка (или первой производной) от функции $y = f(x)$.

Аналогично определяют производную n-го порядка: производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называют производную от производной ($n-1$)-го порядка и обозначают одним из следующих символов:

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x) \qquad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \qquad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Итак, по определению

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'. \tag{11}$$

Механический смысл второй производной. Если функция $s = s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, то

$s'(t_0)$ определяет мгновенную скорость точки (скорость в момент времени t),

$s''(t)$ определяет скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки в момент времени t:

$$s'(t) = \upsilon(t). \tag{12}$$

$$s''(t) = \upsilon'(t) = a(t). \tag{13}$$

II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Прежде чем переходить к рассмотрению решения примеров на вычисление производных, запишем таблицу производных основных элементарных функций и основные правила нахождения производных.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}, \qquad \lambda \neq 0.$

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a, \qquad a > 0$ и $a \neq 1.$

3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a > 0$ и $a \neq 1.$

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

6. $(\sin x)' = \cos x.$

7. $(\cos x)' = -\sin x.$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила нахождения производных

Пусть C – постоянная величина, $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1. $(C)' = 0$.

2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$.

3. $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$.

4. $(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + \upsilon' \cdot u$.

5. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$.

Таблицу производных и правила нахождения производных называют соответственно формулами и правилами дифференцирования.

Задача 1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$.

1. $\boldsymbol{y = 3}$.

Данная функция сохраняет постоянное значение 3. Применяя правило дифференцирования (1), получим:

$$y' = (3)' = 0.$$

2. $\boldsymbol{y = 4 \cdot \mathrm{arctg}\, x}$**.**

Здесь функция $\mathrm{arctg}\, x$ умножается на число 4. Применяя правило дифференцирования (2) – постоянный множитель выносим за знак производной, а затем – формулу дифференцирования (12), получим:

$$y' = (4 \cdot \mathrm{arctg}\, x)' = 4 \cdot (\mathrm{arctg}\, x)' = 4 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{1+x^2}.$$

3. $\boldsymbol{y = 7x^2 + 3x - 2}$**.**

Данная функция представляет собой алгебраическую сумму функций. Применяя правило нахождения производной алгебраической суммы (3), затем – правило дифференцирования (2), затем – формулу дифференцирования (1) и правило дифференцирования (1), получим:

$$y' = \left(7x^2 + 3x - 2\right)' = \left(7x^2\right)' + (3x)' - (2)' =$$

$$= 7 \cdot \left(x^2\right)' + 3 \cdot (x)' - (2)' = 14x + 3 \cdot 1 = 14x + 3.$$

4. $\boldsymbol{y = x^3 \cdot \mathrm{ctg} x}$**.**

Данная функция представляет собой произведение функций x^3 и $\mathrm{ctg} x$. Применяя правило дифференцирования (4), а затем – формулы дифференцирования (1) и (9), получим:

$$y' = \left(x^3 \cdot \mathrm{ctg} x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{ctg} x + (\mathrm{ctg} x)' \cdot x^3 =$$

$$= 3x^2 \cdot \mathrm{ctg} x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot x^3 = 3x^2 \cdot \mathrm{ctg} x - \frac{x^3}{\sin^2 x}.$$

5. $\boldsymbol{y = x \cdot \sin x + \cos x}$**.**

Данная функция представляет собой сумму функций $x \cdot \sin x$ и $\cos x$. Поэтому, сначала применяем правило для производной суммы (3), затем, к первому слагаемому – правило для производной произведения (4), затем – формулы (1), (6) и (7) из таблицы производных. В результате получим:

$$y' = \left(x \cdot \sin x + \cos x\right)' = \left(x \cdot \sin x\right)' + \left(\cos x\right)' =$$
$$= \left(x\right)' \cdot \sin x + \left(\sin x\right)' \cdot x + \left(\cos x\right)' =$$
$$= \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x.$$

6. $\boldsymbol{y = \dfrac{-7x^2}{x^2+7}}$**.**

Данная функция представляет собой дробь. Предварительно вынесем постоянный множитель -7 за знак производной (правило дифференцирования (2)), и применим правила дифференцирования (5), затем (3) и (1) и формулу дифференцирования (1). Получим:

$$y' = \left(\frac{-7x^2}{x^2+7}\right)' = -7 \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+7}\right)' =$$
$$= -7 \cdot \frac{\left(x^2\right)' \cdot \left(x^2+7\right) - \left(x^2+7\right)' \cdot \left(x^2\right)}{\left(x^2+7\right)^2} =$$
$$= -7 \cdot \frac{\left(x^2\right)' \cdot \left(x^2+7\right) - \left[\left(x^2\right)' + \left(7\right)'\right] \cdot x^2}{\left(x^2+7\right)^2} =$$
$$= -7 \cdot \frac{2x \cdot \left(x^2+7\right) - 2x^3}{\left(x^2+7\right)^2} = -7 \cdot \frac{14x}{\left(x^2+7\right)^2}.$$

Задача 2. Найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции.

Формулы дифференцирования (1)–(13), которыми мы пользовались до сих пор при вычислении производных, позволяют, с помощью правил дифференцирования (1)–(6), находить производные от функций только в самых простых случаях. Такие случаи рассмотрены нами выше. Для дифференцирования сложных функций, например, таких как $y = \sqrt{\cos x}$, $y = e^{\operatorname{arcctg} x}$ и т.д., пользуются более общими формулами дифференцирования, основанными на теореме о производной сложной функции.

Прежде чем переходить к рассмотрению решения примеров на нахождение производных от сложных функций, запишем таблицу общих формул дифференцирования.

Таблица общих формул дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ – функция, имеющая производную.

1*u*. $\left(u^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1} \cdot u'$, $\quad \lambda \neq 0$.

2*u*. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$, $\quad a > 0$ и $a \neq 1$.

3*u*. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$.

4*u*. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $\quad a > 0$ и $a \neq 1$.

5*u*. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

6*u*. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7*u*. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8*u*. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

9*u*. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

10*u*. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11*u*. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

12*u*. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

13*u*. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Замечание. Формулы (1)–(13) таблицы производных основных элементарных функций являются частным случаем соответствующих формул (1*u*)–(13*u*) таблицы общих формул дифференцирования при $u = x$ и, следовательно, $u' = 1$.

1. $\boldsymbol{y = (2x + 7)^9}$.

Данная функция является сложной функцией. Ее можно представить как функцию от функции следующим образом:

$$y = u^9, \qquad u = 2x + 7.$$

Применяя формулу дифференцирования (1) и правила дифференцирования (3) и (2), найдем y'_u и u'_x:

$$y'_u = \left(u^9\right)'_u = 9u^8,$$

$$u'_x = (2x + 7)'_x = 2 \cdot 1 + 0 = 2.$$

По правилу нахождения производной сложной функции (8) получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 9u^8 \cdot 2 = 9(2x+7)^8 \cdot 2 = 18(2x+7)^8.$$

Другими словами, по правилу нахождения производной сложной функции имеем: производная сложной функции $y = (2x+7)^9$ по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу $u = 2x+7$, умноженной на производную промежуточного аргумента $u = 2x+7$ по x.

Применяя формулу дифференцирования (1u), получим:

$$y' = \left[(2x+7)^9\right]' = 9(2x+7)^8 \cdot (2x+7)' =$$
$$= 9(2x+7)^8 \cdot (2 \cdot 1 + 0) = 18(2x+7)^8.$$

2. $\boldsymbol{y = \cos 4x}$ **.**

Здесь промежуточным аргументом является функция $u = 4x$. Применяя формулу дифференцирования (7u), получим:

$$y' = (\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -\sin 4x \cdot 4 \cdot 1 = -4\sin 4x.$$

3. $\boldsymbol{y = \cos(7x-4)}$**.**

Здесь $u = 7x-4$. Применяя формулу дифференцирования (7u), получим:

$$y' = [\cos(7x-4)]' = -\sin(7x-4) \cdot (7x-4)' =$$
$$= -\sin(7x-4) \cdot (7 \cdot 1 - 0) = -7\sin(7x-4).$$

4. $\boldsymbol{y = \sin^4 x}$ **.**

Полагая $u = \sin x$ и пользуясь формулой дифференцирования (1u), получим:

$$y' = \left[\sin^4 x\right]' = 4 \cdot \sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x.$$

5. $\boldsymbol{y = \sin^4(3x+1)}$**.**

Здесь функция $\sin(3x+1)$ возводится в четвертую степень. Поэтому для данной функции $y = \sin^4(3x+1)$ промежуточным аргументом будет $u = \sin(3x+1)$. Но функция $u = \sin(3x+1)$ сама является сложной функцией с промежуточным аргументом $\upsilon = 3x+1$. Таким образом, данную функцию $y = \sin^4(3x+1)$ можно представить в виде:

$$y = u^4, \qquad u = \sin\upsilon, \qquad \upsilon = 3x+1.$$

Применяя формулы дифференцирования (1), (6) и правила дифференцирования (3), (2), найдем y'_u и u'_υ, υ'_x:

$$y'_u = \left(u^4\right)'_u = 4u^3,$$

$$u'_\upsilon = (\sin\upsilon)'_\upsilon = \cos\upsilon,$$

$$\upsilon'_x = (3x+1)'_x = 3\cdot 1 + 0 = 3.$$

По правилу нахождения производной сложной функции получим:

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_\upsilon \cdot \upsilon'_x = 4u^3 \cdot \cos\upsilon \cdot 3 = 4(\sin\upsilon)^3 \cdot \cos\upsilon \cdot 3 = \\ &= 4[\sin(3x+1)]^3 \cdot \cos(3x+1) \cdot 3 = \\ &= 12\sin^3(3x+1) \cdot \cos(3x+1). \end{aligned}$$

Короче: полагая (мысленно) $u = \sin(3x+1)$, по формуле дифференцирования (1*u*) найдем:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\sin^4(3x+1)\right]' = 4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot[\sin(3x+1)]' = \\ &= 4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot(3x+1)' = \\ &= 4\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1)\cdot(3\cdot 1+0) = \\ &= 12\cdot\sin^3(3x+1)\cdot\cos(3x+1). \end{aligned}$$

6. $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}^2\, x + \ln\cos x}$ **.**

Данная функция представляет собой сумму функций $\mathrm{tg}^2\, x$ и $\ln\cos x$, которые являются сложными функциями. Для нахождения производной от данной функции сначала применим правило для производной суммы (3), затем – правило для производной сложной функции, и затем – соответствующие формулы дифференцирования. Получим:

$$y' = \left(\mathrm{tg}^2\, x + \ln\cos x\right)' = \left(\mathrm{tg}^2\, x\right)' + (\ln\cos x)' =$$

$$= 2\cdot\mathrm{tg}\, x\cdot(\mathrm{tg}\, x)' + \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' =$$

$$= 2\cdot\mathrm{tg}\, x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}\, x.$$

Задача 3. Для функции, заданной параметрически,

$$\boldsymbol{x = \cos^3 t}, \qquad\qquad \boldsymbol{y = \sin^3 t}.$$

найти производную y от x.

Найдем производные от x и от y по параметру t:

$$x'_t = \left(\cos^3 t\right)'_t = 3\cdot\cos^2 t\cdot(\cos t)'_t = -3\cdot\cos^2 t\cdot\sin t,$$

$$y'_t = \left(\sin^3 t\right)'_t = 3\cdot\sin^2 t\cdot(\sin t)'_t = 3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t.$$

Найдем искомую производную от y по x по формуле (9):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cdot\cos^2 t\cdot\sin t} = -\mathrm{tg}^2\, t\cdot\mathrm{ctg}\, t.$$

Задача 4. Найти производную второго порядка от функции $y = f(x)$.

1. $\boldsymbol{y = x^5 - 7x^3 + 2}$ **.**

Производная второго порядка от функции $y = f(x)$ по определению равна производной от производной первого порядка этой функции. Поэтому сначала найдем y', а затем – y'':

$$y' = \left(x^5 - 7x^3 + 2\right)' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (y')' = \left(5x^4 - 21x^2\right)' = 20x^3 - 42x.$$

Для нахождения y' и y'' применили правила дифференцирования (3) и (1) и формулу дифференцирования (1).

2. $\boldsymbol{y = \sin^2 x}$.

Найдем сначала первую производную y', а затем – вторую y''. Первую производную y' найдем, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции. По формуле (1*u*), где $u = \sin x$, получим:

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Вторую производную найдем, также пользуясь правилом дифференцирования сложной функции. По формуле (6*u*), где $u = 2x$, получим:

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cdot \cos 2x.$$

Замечание. $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

Задача 5. Найти уравнение касательной к графику функции $\boldsymbol{y = x^2 - 4x}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x_0 = 1}$. Построить кривую и касательную.

Решение. Уравнение касательной графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k – угловой коэффициент, $k = f'(x_0)$.

По условию задачи абсцисса точки касания (точки M_0) задана: $x_0 = 1$. Найдем y_0. Для этого значение $x_0 = 1$ подставим в уравнение кривой $y = x^2 - 4x$, получим $y_0 = -3$.

Найдем угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ искомой касательной. Для этого сначала найдем производную $f'(x)$, а затем – ее значение в точке x_0:

$$f'(x) = \left(x^2 - 4x\right)' = 2x - 4,$$
$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2,$$
$$k = f'(x_0) = f'(1) = -2.$$

Подставляя значения x_0, y_0, k в уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$, получим уравнение искомой касательной:

$$y + 3 = -2(x - 1) \text{ или } y = -2x - 1.$$

Уравнение $y = x^2 - 4x$ может быть записано в виде $y + 4 = (x - 2)^2$. Данное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2, -4)$. Парабола и касательная к параболе в точке $M_0(1, -3)$ приведены на рис. 1.

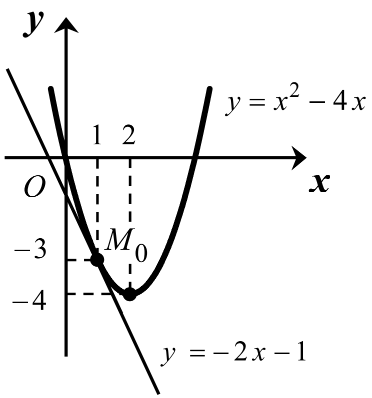

Рис. 1.

Ответ: $y = -2x - 1$.

Задача 6. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 2t^2 + 4t - 1$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найти скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения тела равна производной от пути s по времени t: $\upsilon(t) = s'(t)$. Ускорение движения равно второй производной от пути s по времени t: $a(t) = s''(t)$. Найдем скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения (в момент времени $t_0 = 3$ с):

$$\upsilon(t) = s'(t) = \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 1\right)' = 3t^2 - 4t + 4,$$
$$\upsilon(t_0) = \upsilon(3) = 3\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 4 = 19 \text{ (м/с)}.$$

$$a(t) = s''(t) = [\upsilon(t)]' = \left(3t^2 - 4t + 4\right)' = 6t - 4,$$
$$a(t_0) = a(3) = 6\cdot 3 - 4 = 14 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

***Ответ*:** $\upsilon(t_0) = 19$ (м/с), $a(t_0) = 14$ (м/с^2).

Задача 7. Найти приращение и дифференциал функции $\boldsymbol{y = x^2 - x}$ в точке $\boldsymbol{x_0 = 1}$ при $\boldsymbol{\Delta x = 0{,}1}$.

Решение. Запишем приращение функции $y = x^2 - x$ в точке x_0. Для этого дадим аргументу $x = x_0$ приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Найдем $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$, а затем – $\Delta y(x_0)$.

$f(x) = x^2 - x$, при $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$ имеем:

$$f(x_0) = x_0^2 - x_0,$$

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)=$$
$$=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0-\Delta x,$$
$$\Delta y(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$$
$$=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0-\Delta x-x_0^2+x_0=$$
$$=2x_0\Delta x-\Delta x+\Delta x^2=(2x_0-1)\Delta x+\Delta x^2.$$

Итак, приращение функции $y=x^2-x$ в точке x_0 равно:

$$\Delta y(x_0)=(2x_0-1)\Delta x+\Delta x^2.$$

Здесь первое слагаемое $(2x_0-1)\Delta x$ пропорционально Δx, оно является главной линейной частью приращения функции. Второе слагаемое Δx^2 – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx.

Дифференциал функции $y=x^2-x$ в точке x_0 есть главная линейная часть приращения $\Delta y(x_0)$:

$$\mathrm{d}y(x_0)=(2x_0-1)\Delta x.$$

При $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}1$ получим:

$$\Delta y(x_0)=(2x_0-1)\Delta x+\Delta x^2,$$

$$\Delta y(1)=(2\cdot 1-1)\cdot 0{,}1+(0{,}1)^2=0{,}11.$$

$$\mathrm{d}y(x_0)=(2x_0-1)\Delta x,$$
$$\mathrm{d}y(1)=(2\cdot 1-1)\cdot 0{,}1=0{,}1.$$

***Ответ*:** $\Delta y(1)=0{,}11$, $\quad \mathrm{d}y(1)=0{,}1$.

Задача 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $\boldsymbol{y=x^4-4x+3}$ на отрезке $[\mathbf{-3,\ 2}]$.

Решение. Найдем критические точки, принадлежащие данному отрезку. Для этого найдем производную $f'(x)$, приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$y' = \left(x^4 - 4x + 3\right)' = 4x^3 - 4 = 4\left(x^3 - 1\right) = 4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right),$$

$$4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0,$$

$$x = 1.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$. Эта точка принадлежит заданному отрезку $[-3, 2]$, и поэтому будет приниматься во внимание.

Вычислим значение функции $y = x^4 - 4x + 3$ в критической точке $x = 1$ и в точках $x = -3$ и $x = 2$ (т.е. на концах отрезка $[-3, 2]$):

$$y(1) = 0, \qquad y(-3) = 96, \qquad y(2) = 11.$$

Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее. Наименьшее значение функция $y = x^4 - 4x + 3$ принимает в критической точке $x = 1$, наибольшее – на левом конце отрезка $[-3, 2]$: в точке $x = -3$.

$$y_{\text{наим.}} = y(1) = 0,$$

$$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = 96.$$

***Ответ*:** $y_{\text{наим.}} = y(1) = 0, \quad y_{\text{наиб.}} = y(-3) = 96.$

Замечание. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

Задача 10. Исследовать функцию $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}^3}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2}$ и построить ее график.

Подробное изложение теоретического материала к задаче 10 читатель найдет в работах [1, 2, 5], подробно разобранную задачу 10 – в работе [9], подробно разобранные задачи, аналогичные задаче 10 – в работах [3, 4, 6, 7]. Здесь ограничимся тем, что приведем схему исследования функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.

3. Выяснить вопрос о существовании асимптот.

4. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

5. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции; определить точки перегиба.

6. Найти, в случае необходимости, координаты дополнительных точек графика функции (в частности, координаты точек пересечения с осями координат).

7. Используя результаты исследования, построить график функции.

Итак, **исследовать функцию и построить ее график:**

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}^3}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2}.$$

1. Данная функция определена и непрерывна при всех значениях x, за исключением нулей знаменателя:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

2. Данная функция – функция общего вида, ее график симметрии не имеет.

3. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2.$$

При $x \to -\infty$ k и b имеют те же значения.

Прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой кривой.

4. Первая производная

$$y' = \left[\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

равна нулю в точках $x = 0$ и $x = 3$ и обращается в бесконечность в точке $x = 1$. Критическими точками будут точки $x = 0$ и $x = 3$. Точка $x = 1$ является точкой разрыва функции.

Исследуем знак первой производной $f'(x)$ на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, +\infty)$. Результаты исследования запишем в таблицу 1.

На интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(3, +\infty)$ первая производная $f'(x) > 0$, следовательно, функция возрастает на этих интервалах. На интервале $(1, 3)$ $f'(x) < 0$, следовательно, на этом интервале функция убывает.

При переходе через критическую точку $x = 0$ первая производная $f'(x)$ не меняет знак, следовательно, в точке $x = 0$ функция экстремума не имеет.

Таблица 1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+		+		–		+
$f(x)$	функция возрастает		функция возрастает		функция убывает		функция возрастает
Точки экстремума функции		нет		нет точка разрыва		min $x_{\min} = 3$ $y_{\min} = 6\frac{3}{4}$	

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	–		+		+
$f(x)$	кривая выпукла		кривая вогнута		кривая вогнута
Точки перегиба кривой		перегиб $x = 0$ $y = 0$		нет точка разрыва	

При переходе через точку $x=1$ первая производная $f'(x)$ меняет знак «+» на знак «–», однако в точке $x=1$ функция экстремума не имеет: в точке $x=1$ функция терпит разрыв.

При переходе через критическую точку $x=3$ первая производная $f'(x)$ меняет знак «–» на знак «+», следовательно, в точке $x=3$ функция имеет минимум. Найдем $y_{\min}$:

$$y_{\min}=y(3)=\frac{3^3}{(3-1)^2}=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}.$$

Точка $\left(3,\,6\frac{3}{4}\right)$ является точкой кривой, соответствующей экстремуму исследуемой функции.

5. Вторая производная

$$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

равна нулю в точке $x=0$ и обращается в бесконечность в точке $x=1$. Критической точкой по второй производной будет точка $x=0$.

Исследуем знак второй производной $f''(x)$ на интервалах $(-\infty,0)$, $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Результаты исследования запишем в таблицу 1.

На интервале $(-\infty,0)$ вторая производная $f''(x)<0$ и кривая выпукла. На интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$ $f''(x)>0$ и кривая вогнута.

При переходе через критическую по второй производной точку $x=0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, следовательно, в точке с абсциссой $x=0$ кривая имеет перегиб. Найдем значение функции в точке $x = 0$, которая является абсциссой точки перегиба кривой: $y(0) = 0$.

Точка $(0, 0)$ является точкой перегиба кривой.

6. Используя результаты проведенного исследования построим график функции (рис. 2).

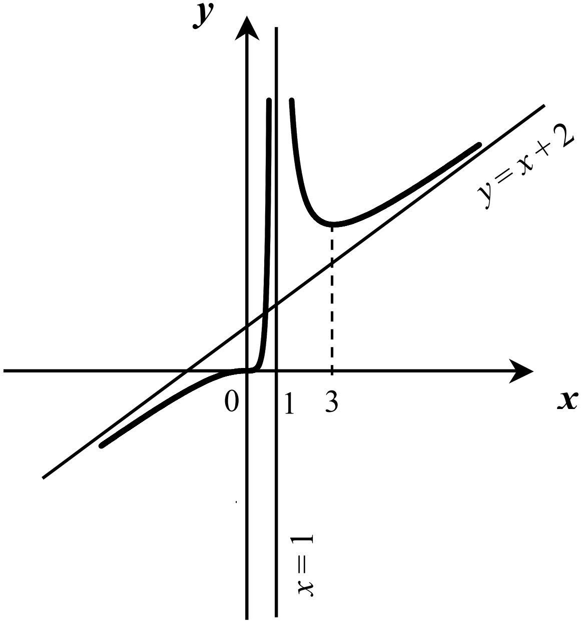

Рис. 2. График функции $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

III. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение производной, ее механический и геометрический смыслы.

2. Выведите формулы производной суммы, произведения и частного двух функций. Приведите примеры.

3. Выведите формулу дифференцирования тригонометрических и логарифмических функций.

4. Выведите формулу дифференцирования сложной функции. Приведите примеры.

5. Сформулируйте правило логарифмического дифференцирования.

6. Выведите формулы дифференцирования степенной функции с любым действительным показателем, показательной функции, сложной показательной функции.

7. Докажите теорему о производной обратной функции. Выведите формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций.

8. Сформулируйте определение дифференциала функции.

9. Для каких точек графика функции дифференциал функции больше приращения, для каких – меньше?

10. Для каких функций дифференциал равен приращению?

11. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала функции?

12. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

13. Сформулируйте определения производной и дифференциала высших порядков.

14. Сформулируйте механический смысл второй производной.

15. Как находятся первая и вторая производные функции, заданной параметрически?

16. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

17. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенного выражения вида $\frac{0}{0}$. Перечислите различные типы неопределенных выражений, для раскрытия которых может быть применено правило Лопиталя.

18. Сформулируйте определения возрастающей и убывающей на отрезке функции. Выведите достаточный признак возрастания функции.

19. Сформулируйте определение точки экстремума в любом промежутке. Покажите, что функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в любом промежутке.

20. Приведите пример, показывающий, что обращение в некоторой точке производной в нуль не является достаточным условием наличия в этой точке экстремума функции.

21. Сформулируйте первое и второе достаточные условия экстремума функции.

22. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке? Всегда ли они существуют?

23. Сформулируйте определения выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба кривой. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

24. Сформулируйте определение асимптоты кривой. Как находят вертикальные и наклонные асимптоты линии, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

25. Изложите схему общего исследования функции и построения ее графика.

IV. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ рекомендуется придерживаться следующих правил.

1. Контрольную работу надо выполнять в тетради, на обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины.

2. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту и в указанном порядке. Например, Ваш шифр 431–007, тогда, номер Вашего варианта 7, номера задач: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77 (см. таблицу).

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Номера задач контрольной работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

3. Перед решением каждой задачи надо переписать полностью ее условие. Переписывая условие задачи следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

4. Решение задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

V. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1–10. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от функции $y = f(x)$.

1. *а*) $y = \frac{1}{4}\cos x$, *г*) $y = \sin x \cdot (\operatorname{ctg} x - 1)$,

б) $y = -2x^3 + 6x - 5$, *д*) $y = \frac{2x^2}{1-3x}$,

в) $y = x^7 \cdot 7^x$, *е*) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$.

2. *а*) $y = -2\arcsin x$, *г*) $y = \sin x \cdot (\operatorname{ctg} x - 1)$,

б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 11$, *д*) $y = \frac{2x^2}{1-3x}$,

в) $y = e^x \cdot x^4$, *е*) $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

3. *а*) $y = 8\operatorname{ctg} x$, *г*) $y = (\cos x + 1) \cdot \operatorname{tg} x$,

б) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$, *д*) $y = \frac{2x^2}{4-x^3}$,

в) $y = x^{10} \cdot \lg x$, *е*) $y = \frac{\arcsin x}{1-x^2}$.

4. *а*) $y = -\frac{1}{2}\sin x$, *г*) $y = \cos x \cdot (1 - \operatorname{ctg} x)$, *б*) $y = 4 + 4x - 4x^3$, *д*) $y = \dfrac{-3x^2}{3 + x^2}$,

в) $y = x^5 \cdot \log_5 x$, *е*) $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$.

5. *а*) $y = 5 \cdot 5^x$, *г*) $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) \cdot x$,

б) $y = -4x^3 + \dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{5}$, *д*) $y = \dfrac{-8x}{3x^2 + 4}$,

в) $y = x^2 \cdot \arccos x$, *е*) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$.

6. *а*) $y = 7 \operatorname{tg} x$, *г*) $y = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$,

б) $y = -1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}x^3$, *д*) $y = \dfrac{-x^2}{2x^3 + 1}$,

в) $y = x^4 \cdot \ln x$, *е*) $y = \dfrac{\arccos x}{1 - x^2}$.

7. *а*) $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{arcctg} x$, *г*) $y = \left(1 - x^2\right) \cdot \arccos x$,

б) $y = 10x^3 - 5x + 10$, *д*) $y = \dfrac{7x}{2 - 2x^2}$,

в) $y = 3^x \cdot x^3$, *е*) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

8. *а*) $y = -4 \log_4 x$, *г*) $y = (\sin x + 1) \cdot \operatorname{arctg} x$, *б*) $y=\frac{1}{3}x^3-4x+1$, *д*) $y=\frac{-x^2}{1-4x}$,

в) $y=x\cdot\arcsin x$, *е*) $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

9. *а*) $y=-3\arccos x$, *г*) $y=\operatorname{tg}x\cdot(1-\operatorname{arcctg}x)$,

б) $y=2x^3+\frac{1}{4}x-7$, *д*) $y=\frac{-12x}{9-x^2}$,

в) $y=x^2\cdot e^x$, *е*) $y=\frac{x}{\sin x+\cos x}$.

10. *а*) $y=e^8\cdot e^x$, *г*) $y=(1-\sin x)\cdot\operatorname{ctg}x$,

б) $y=\frac{1}{4}+3x-x^3$, *д*) $y=\frac{x^2}{1-2x^3}$,

в) $y=\operatorname{arctg}x\cdot x^6$, *е*) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

11–20. Найти производную первого порядка:
а)–е) **пользуясь правилом дифференцирования сложной функции,**
ж) **от функции, заданной параметрически.**

11. *а*) $y=(1+5x)^5$,

б) $y=e^{-2x}$, *г*) $y=\ln^3(5-3x)$,

в) $y=\operatorname{arcctg}^2 x$, *д*) $y=\sin\left(\cos\frac{x^3}{6}\right)$, *е*) $y = x \cdot 7^{-x^2+2x} + 7 \cdot e^{\sqrt{x^2-1}}$,

ж) $x = e^{5t}$, $y = e^{-5t}$.

12. *а*) $y = (2+3x)^5$,

б) $y = \arcsin 3x$,

в) $y = \operatorname{ctg}^2 x$,

г) $y = \lg^3(4-5x)$,

д) $y = \cos\left(\ln \frac{x^3}{4}\right)$,

е) $y = x \cdot 10^{-x^2+3x} + 10 \cdot e^{\sqrt{x^2-9}}$,

ж) $x = e^{-t^2}$, $y = \operatorname{arctg}(2t+1)$.

13. *а*) $y = (5+2x)^5$,

б) $y = 4^{\sin x}$,

в) $y = \arccos^2 x$,

г) $y = \operatorname{tg}^3(2-5x)$,

д) $y = \cos\left(\ln \frac{x^3}{2}\right)$,

е) $y = x \cdot 3^{-x^2+6x} + 3 \cdot e^{\sqrt{x^2-4}}$,

ж) $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$.

14. *а*) $y = (4+4x)^5$,

б) $y = \ln 2x$,

в) $y = \operatorname{arctg}^2 x$,

г) $y = \cos^3(3-2x)$,

д) $y = \operatorname{ctg}\left(\sin \frac{x^3}{5}\right)$,

е) $y = x \cdot 8^{-x^2+5x} + 8 \cdot e^{\sqrt{x^2-5}}$,

ж) $x = 2\operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2\operatorname{ctg} t$.

15. *а*) $y=(3+2x)^5$,

б) $y=\operatorname{tg}5x$,

г) $y=\arcsin^3(1-4x)$,

в) $y=\ln^2 x$,

д) $y=\lg\left(\cos\dfrac{x^3}{7}\right)$,

е) $y=x\cdot 5^{-x^2+4x}+5\cdot e^{\sqrt{x^2-2}}$,

ж) $x=\operatorname{arcctg}t$, $y=\ln\left(1-t^2\right)$.

16. *а*) $y=(3+6x)^5$,

б) $y=2^{\cos x}$,

г) $y=\operatorname{ctg}^3(2-2x)$,

в) $y=\arcsin^2 x$,

д) $y=\operatorname{tg}\left(\lg\dfrac{x^3}{4}\right)$,

е) $y=x\cdot 2^{-x^2+2x}+2\cdot e^{\sqrt{x^2-10}}$,

ж) $x=e^{-t}$, $y=e^{2t}$.

17. *а*) $y=(4+5x)^5$,

б) $y=\sin 3x$,

г) $y=\operatorname{arcctg}^3(1-6x)$,

в) $y=\operatorname{tg}^2 x$,

д) $y=\ln\left(\cos\dfrac{x^3}{6}\right)$,

е) $y=x\cdot 6^{-x^2+5x}+6\cdot e^{\sqrt{x^2-7}}$,

ж) $x=\arcsin\left(t^2-1\right)$, $y=\arccos 2t$.

18. *а*) $y=(1+6x)^5$,

б) $y=\operatorname{arctg}4x$,

г) $y=\sin^3(4-3x)$,

в) $y = \log_3{}^2 x$, *д*) $y = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x^3}{5}\right)$,

е) $y = x \cdot 9^{-x^2+4x} + 9 \cdot e^{\sqrt{x^2-3}}$,

ж) $x = \cos 2t$, $y = 2\sin 2t$.

19. *а*) $y = (2+4x)^5$,

б) $y = \log_5 5x$, *г*) $y = \arccos^3(3-5x)$,

в) $y = \sin^2 x$, *д*) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x^3}{2}\right)$,

е) $y = x \cdot 4^{-x^2+3x} + 4 \cdot e^{\sqrt{x^2-6}}$,

ж) $x = 2^{-t}$, $y = 2^{2t}$.

20. *а*) $y = (5+3x)^5$,

б) $y = \operatorname{ctg} 2x$, *г*) $y = \operatorname{arctg}^3(5-6x)$,

в) $y = \cos^2 x$, *д*) $y = \log_3\left(\sin\frac{x^3}{7}\right)$,

е) $y = x \cdot 11^{-x^2+6x} + 11 \cdot e^{\sqrt{x^2-8}}$,

ж) $x = \operatorname{arcctg} 2t$, $y = \ln\left(1+4t^2\right)$.

21–30. Найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Построить кривую $y = f(x)$ и касательную.

21. $y = x^2 + 1$, $x_0 = -1$.

22. $y = x^2 - 1$, $x_0 = 1$.

23. $y = -x^2 + 1$, $x_0 = 2$.

24. $y = -x^2 - 1$, $x_0 = 0$.

25. $y = -x^2 + 2$, $x_0 = -2$.

26. $y = -x^2 - 2$, $x_0 = 1$.

27. $y = x^2 - 2$, $x_0 = -1$.

28. $y = x^2 + 2$, $x_0 = 2$.

29. $y = 4 - x^2$, $x_0 = 2$.

30. $y = -x^2 + 3$, $x_0 = 0$.

31–40. Найти приращение и дифференциал функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x = x_0}$ при $\boldsymbol{\Delta x = 0{,}1}$.

31. $y = 2x^3 + 1$, $x_0 = 3$.

32. $y = 2x^3 - 1$, $x_0 = 2$.

33. $y = 3x^3 + 2$, $x_0 = 2$.

34. $y = 3x^3 - 2$, $x_0 = 3$.

35. $y = 4x^3 + 3$, $x_0 = 1$.

36. $y = 4x^3 - 3$, $x_0 = 3$.

37. $y = 5x^3 - 5$, $x_0 = 1$.

38. $y = 5x^3 + 6$, $x_0 = 2$.

39. $y = 6x^3 + 2$, $\qquad x_0 = 2$.

40. $y = 6x^3 - 2$, $\qquad x_0 = 1$.

41–50. Найти производную второго порядка от функции $y = f(x)$.

41. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

42. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

43. $y = -\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

44. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

45. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

46. $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$.

47. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

48. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

49. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

50. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

51–60. Тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найти скорость и ускорение движения тела через две секунды после начала движения.

51. $s = \dfrac{4}{3}t^3 - t + 5$.

56. $s = 2t^3 - \dfrac{1}{2}t^2 + t$.

52. $s = 2t^3 - t^2 + 1$.

53. $s = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5$.

54. $s = 4t^3 - 2t^2 + t$.

55. $s = 3t^3 - t + 1$.

57. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$.

58. $s = 4t^3 + t - 1$.

59. $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t^2 - 1$.

60. $s = 5t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 1$.

61–70. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на указанном промежутке.

61. $y = -2x + \frac{27}{x^2} - 69$, на отрезке $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$.

62. $y = x^2 + \frac{54}{x} - 9$, на отрезке $[1, 6]$.

63. $y = -x - \frac{4}{x^2} + 4$, на отрезке $[1, 4]$.

64. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$, на отрезке $[1, 4]$.

65. $y = -8x + \frac{4}{x^2} - 15$, на отрезке $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

66. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$, на отрезке $[2, 4]$.

67. $y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$, на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

68. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{x} + 8$, на отрезке $[-4, -1]$.

69. $y = 2x - \dfrac{64}{x^2} - 3$, на отрезке $[-8, -1]$.

70. $y = -3x^2 + \dfrac{48}{x} + 12$, на отрезке $[-4, -1]$.

71–80. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

71. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

72. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

73. $y = -\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

74. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

75. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

76. $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$.

77. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

78. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

79. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

80. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс. – 2010. – 415 с.

2. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс: учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб. : Лань, 2010. – 960 с.

3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2011. – 460 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко [и др.]. – М. : ОНИКС, 2010. – 816 с.

Дополнительная литература

5. Письменный, Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Г. Письменный. – М. : Айрис-пресс. – 2009. – 288 с.

6. Лесняк, Л.И. / Производная и ее приложения : учебное пособие / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 312 с.

7. Сборник задач по высшей математике / Под ред. П.Е. Дюбука и Г.И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1995. – 591 с.

8. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : ПРОФЕССИЯ, 2008. – 432 с.

9. Пантюхова, О.Д. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения : учебное пособие / О.Д. Пантюхова – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2008. – 100 с.